

자동제어 한방에 끝내기

7.State Space Analysis

목차

State

- Why?
- SISO / MIMO systems
- Review of Linear Algebra

State Equations

- Controllability & Observability
- Canonical Forms
- State Feedback
- Linear Quadratic Regulator

State systems

- 이제 x 와 $\dot{x}$ 은 서로 다르다.
- 앞으로 공부를 하면서 여러분들이 볼 형식

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du\end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \dot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & -5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

Review of Linear Algebra

- Laplace transform of matrix equation

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + B u$$

$$\begin{pmatrix} s X_1 \\ s X_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} + B U$$

$$\Rightarrow \overset{sIX}{s} X = AX + BU$$

$$(sI - A)X = BU$$

$$X(s) = (sI - A)^{-1} B U(s)$$

Controllability

- 내가 준 input이 output state의 **모든 변수**를 제어할 수 있는가?
= 임의의 input으로 내가 원하는 state에 x 가 위치하도록 할 수 있는가?

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \dot{x} = Ax + Bu$$

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$\ddot{x} = A\dot{x} + B\ddot{u} \Rightarrow \ddot{x} = A(Ax + Bu) + B\ddot{u} \\ = A^2x + ABu + B\ddot{u}$$

$$\ddot{x} - A^2x = ABu + B\ddot{u} = \begin{bmatrix} AB & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ \ddot{u} \end{bmatrix}$$

$\vdots$

Controllability

$$X^{(n)} = A^n X + A^{n-1} B u + A^{n-2} B \dot{u} + \dots + B u^{(n-1)}$$

$$X^{(n)} - A^n X = \begin{bmatrix} A^{n-1} B & A^{n-2} B & \dots & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ \dot{u} \\ \vdots \\ u^{(n-1)} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B & AB & \dots & A^{n-1} B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^{(n-1)} \\ \vdots \\ u \end{bmatrix}$$

full rank

$$\begin{bmatrix} B & AB & \dots & A^{n-1} B \end{bmatrix}$$

Controllability Matrix C

$$x_{t+1} = Ax_t + Bu_t$$

Observability

- 내가 보는 y 로 x 의 state를 **유일하게** 복원할 수 있는가?
= y 값을 관찰하는 것이 x 의 **initial condition**을 복원하는가?

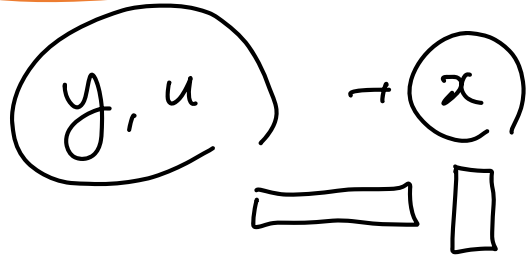
$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du\end{aligned}$$

$$(x_0) \sim$$

$$\dot{x} = Ax$$

$$y = Cx$$

Observability



$$y(t_0) \rightarrow C x(t_0) \rightarrow$$

$$\dot{y}(t_0) \rightarrow C \dot{x}(t_0) \rightarrow CA x(t_0)$$

$\vdots$

$$C \ddot{x}(t_0)$$

$$C A^2 x(t_0)$$

$\vdots$

$$C A^{n-1} x(t_0)$$

$$\dot{x} = Ax$$

$$y = Cx$$

$$x(t_0) = \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} y(t_0) \\ \dot{y}(t_0) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(t_0) \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} x(t_0)$$

$\hookrightarrow$ observer matrix O