

자동제어 한방에 끝내기

7.State Space Analysis

목차

State

- Why?
- SISO / MIMO systems
- Review of Linear Algebra

State Equations

- Controllability & Observability
- Canonical Forms
- State Feedback
- Linear Quadratic Regulator

State systems

- 이제 x 와 $\dot{x}$ 은 서로 다르다.
- 앞으로 공부를 하면서 여러분들이 볼 형식

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx + Du$$

$$X = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ x \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \dot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & -5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$\ddot{x} = -6\dot{x} - 5x + u$$

$$\ddot{x} + 6\dot{x} + 5x = u$$

$$\dot{x} = \dot{x}$$

$$(s^2 + 6s + 5)X(s) = U(s)$$

State systems

$$\begin{bmatrix} \ddot{x}^{(4)} \\ \ddot{y}^{(4)} \\ \ddot{z}^{(4)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\dot{u}_1\dot{\theta}\cos\theta - u_1\dot{\theta}^2\sin\theta \\ -2\dot{u}_1\dot{\phi}\cos\phi + u_1\dot{\phi}^2\sin\phi \\ -2\dot{u}_1\dot{\theta}\sin\theta\cos\phi - 2\dot{u}_1\dot{\phi}\cos\theta\sin\phi + 2u_1\dot{\theta}\dot{\phi}\sin\theta\sin\phi - u_1(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2)\cos\theta\cos\phi \end{bmatrix} \quad (23)$$

$$+ \begin{bmatrix} \sin\theta & u_1\cos\theta & 0 \\ -\sin\phi & 0 & -u_1\cos\phi \\ \cos\theta\cos\phi & -u_1\sin\theta\cos\phi & -u_1\cos\theta\sin\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u}_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \ddot{u}_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta & u_1\cos\theta & 0 \\ -\sin\phi & 0 & -u_1\cos\phi \\ \cos\theta\cos\phi & -u_1\sin\theta\cos\phi & -u_1\cos\theta\sin\phi \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} -2\dot{u}_1\dot{\theta}\cos\theta + u_1\dot{\theta}^2\sin\theta + v_1 \\ 2\dot{u}_1\dot{\phi}\cos\phi - u_1\dot{\phi}^2\sin\phi + v_2 \\ 2\dot{u}_1\dot{\theta}\sin\theta\cos\phi + 2\dot{u}_1\dot{\phi}\cos\theta\sin\phi - 2u_1\dot{\theta}\dot{\phi}\sin\theta\sin\phi + u_1(\dot{\theta}^2 - \dot{\phi}^2)\cos\theta\cos\phi + v_3 \end{bmatrix}. \quad (24)$$

Why?

- 왜 이런식으로 보냐?
- 앞으로 여러분들은 하나의 입력 – 하나의 출력 system 만을 다루지 않는다.
- 여러 개의 변수를 다루고, 이 변수를 통해 제어에 필수적인 **함수**들을 접하게 된다.
- 함수를 정의하고 여러 개의 변수를 다루려면?
 - 행렬의 사용

SISO / MIMO systems

- SISO
 - Single-Input & Single-Output systems
 - 변수는 여러 개 $x, \dot{x}, \ddot{x}$ 더라도, 하나의 물리적인 변수만을 다루며, input u 가 단일값
- MIMO
 - Multi-Input & Multi-Output systems
 - 변수의 물리적 종류가 여러 개이고, input도 여러 개이다.

Review of Linear Algebra

- Vectors & Matrices

$$(a_1, a_2, a_3) \quad \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} \\ \mathbb{R}^{3 \times 3} & \mathbb{R}^3 & & \mathbb{R}^3 \\ \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 & & & \end{matrix}$$

Review of Linear Algebra

- Matrix Multiplication

$$\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \\ \\ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} | & | & | \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ | & | & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 \end{bmatrix}$$

- $AB = BA$?

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \\ \\ \end{bmatrix}$$

Review of Linear Algebra

- Rank of a matrix

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 4 \\ 1 & 9 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

Rank = 3

$\Rightarrow$ RREF

(Reduced Row Echelon Form)

$n \times m$ matrix: max Rank? $(n < m)$ (n)