

강좌번호:

학번:

이름:

단답형 문제는 답만, 나머지 문제는 답과 그 풀이과정을 해당 답안영역에 가독성이 높게 정자로 쓰시오. (총점 150점)

문제 1. [단답형: 아래 답란에 답을 쓸 것] (10점) 다음 극한을 구하시오.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x \sin x} - \frac{\cos x}{x^2} \right)$$

단답형 답란
1

강좌번호:	학번:	이름:
-------	-----	-----

문제 2. (10점) 다음 급수의 수렴 여부를 판정하시오.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin \left(\arctan \frac{1}{n} \right)$$

(풀이)

강좌번호:	학번:	이름:
-------	-----	-----

문제 3. (15점) 다음 급수의 수렴 여부를 판정하시오.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(n^{\frac{1}{n}} - 1 \right)$$

(풀이)

강좌번호:	학번:	이름:
-------	-----	-----

문제 4. (20점) 다음 거듭제곱급수가 수렴하는 x 의 범위를 구하시오.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) x^n$$

(풀이)

강좌번호:	학번:	이름:
-------	-----	-----

문제 5. (15점) 다음 식을 만족하는 실수 x 의 값을 모두 구하시오.

$$\frac{x}{2!} + \frac{x^2}{4!} + \frac{x^3}{6!} + \cdots = -2$$

(풀이)

강좌번호:	학번:	이름:
-------	-----	-----

문제 6. (20점) 함수 $f(x) = \arctan x - \frac{\pi}{4}$ 에 대하여 다음 물음에 답하시오.

- (a) (10점) 점 $x = 1$ 에서 함수 $f(x)$ 의 2차 근사다항식을 구하시오.
- (b) (10점) $f(1.1)$ 의 값을 오차가 10^{-3} 이하가 되도록 구하시오.

(풀이)

강좌번호:

학번:

이름:

문제 7. (15점) 함수 $f(x) = \arcsin x$ 에 대해 다음 물음에 답하시오.

(a) (5점) 함수 $f(x)$ 의 도함수를 구하시오.

(b) (5점) 함수 $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 의 테일러급수를 구하시오. (항을 3개 이상 구하시오.)

(c) (5점) 위의 결과를 이용하여 $f(x)$ 의 테일러 급수를 구하시오. (항을 3개 이상 구하시오.)

(풀이)

강좌번호:	학번:	이름:
-------	-----	-----

문제 8. (15점) 구간 $x > -1$ 에서 정의된 함수 $f(x) = 2 \cosh x + \log(x + 1)$ 의 역함수를 $g(y)$ 라고 할 때, $y = 2$ 에서 $g(y)$ 의 2차 근사다항식을 구하시오.

(풀이)

강좌번호:	학번:	이름:
-------	-----	-----

문제 9. (15점) 직교좌표계로 표현된 영역 $\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ 와 $x \geq 0, y \geq 0$ 의 공통부분을 원기둥좌표계와 구면좌표계로 나타내시오.

(풀이)

강좌번호:	학번:	이름:
-------	-----	-----

문제 10. (15점) 좌표평면에서 극좌표계로 주어진 곡선

$$r^2 = 2a^2 \cos 2\theta, \quad a > 0$$

위의 극좌표로 주어진 점 $A\left(a, \frac{5\pi}{6}\right)$ 와 x 축 위의 점 $B(-a, 0)$, $C(a, 0)$ 에 대하여 다음 물음에 답하시오.

- (a) (5점) 주어진 곡선의 개형을 그리시오.
- (b) (5점) $|\overline{AB}| \times |\overline{AC}| = a^2$ 임을 보이시오.
- (c) (5점) $\sin(\angle BAC)$ 를 구하시오.

(풀이)

강좌번호:	학번:	이름:
-------	-----	-----

모든 문제의 답과 그 풀이과정을 해당 문제의 답안영역에 가독성이 높게 정자로 쓰시오. (총점 200점)

문제 1. (15점) 3차원 공간 $\mathbb{R}^3$ 의 영이 아닌 벡터 $\mathbf{a}$ 와 벡터 $\mathbf{b}, \mathbf{c}$ 가 다음 두 관계식을 만족한다.

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times \mathbf{c}, \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}.$$

이 때 $\mathbf{b} = \mathbf{c}$ 임을 보이시오.

(풀이)

강좌번호:	학번:	이름:
-------	-----	-----

문제 2. (20점) 사이클로이드

$$x = t - \sin t, \quad y = 1 - \cos t \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

와 $y \geq \frac{7}{5}$ 의 공통부분을 나타내는 곡선을 X라 할 때, 곡선 X의 길이와 중심을 구하시오.

(풀이)

강좌번호:	학번:	이름:
-------	-----	-----

문제 3. (15점) 3차원 공간 $\mathbb{R}^3$ 의 점을 직선 $6x = 3y = 2z$ 에 대한 대칭점으로 대응시켜 주는 선형사상을 $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ 라고 하자. F 를 나타내는 행렬을 구하시오.

(풀이)

강좌번호:	학번:	이름:
-------	-----	-----

문제 4. (15점) 구간 $I = [0, 2\pi]$ 에서 정의된 곡선 $X(t) = \cosh t(\cos t, \sin t, 0) + t(0, 0, 1)$ 에 대하여 다음 물음에 답하시오.

- (a) (5점) 주어진 곡선의 길이를 구하시오.
- (b) (10점) $t = \pi$ 에서 접촉평면의 식을 구하시오.

(풀이)

강좌번호:	학번:	이름:
-------	-----	-----

문제 5. (15점) 3차원 공간 $\mathbb{R}^3$ 의 두 점 $(-1, 2, 1)$ 과 $(1, 1, 2)$ 을 지나는 직선을 평면

$$x - 2y + 2z = 1$$

에 정사영하여 얻은 직선의 식을 구하시오.

(풀이)

강좌번호:	학번:	이름:
-------	-----	-----

문제 6. (20점) 크기가 각각 2, 1, 1이고 서로 수직인 세 벡터 $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ 에 대하여 다음 물음에 답하시오.

- (a) (10점) $|\mathbf{u} + 3\mathbf{v} - 2\mathbf{w}|$ 의 값을 구하시오.
- (b) (10점) $x^4 + y^4 + z^4 = 1$ 를 만족하는 세 실수 x, y, z 에 대하여 $|x\mathbf{u} + 3y\mathbf{v} - 2z\mathbf{w}|$ 의 최댓값을 구하시오.

(풀이)

강좌번호:	학번:	이름:
-------	-----	-----

문제 7. (15점) 극좌표계로 주어진 곡선 $r^2 = 4 \sin 2\theta$ 로 둘러싸인 영역을 A , 곡선 $r = \sqrt{2}$ 의 외부에 놓인 영역을 B 라고 하자. A 와 B 에 동시에 속하는 영역의 넓이를 구하시오.

(풀이)

강좌번호:

학번:

이름:

문제 8. (20점) $r(0) = 1$ 인 일급증가함수 $r(t)$ 에 대하여 곡선 $X(t) = r(t)(\cos t, \sin t)$ 일 때 다음 물음에 답하시오.

(a) (10점) $X(t)$ 와 $X'(t)$ 가 이루는 각을 $0 \leq \theta(t) \leq \pi$ 라 할 때

$$r'(t) = \sqrt{r(t)^2 + r'(t)^2} \cos \theta(t)$$

이 성립함을 보이고, $0 \leq \theta(t) \leq \frac{\pi}{2}$ 임을 보이시오.

(b) (10점) $X(t)$ 와 $X'(t)$ 가 이루는 각이 $\frac{\pi}{4}$ 일 때, $r(t)$ 를 구하시오.

(풀이)

강좌번호:	학번:	이름:
-------	-----	-----

- 문제 9.** (20점) 3차원 공간 $\mathbb{R}^3$ 의 세 점 $A = (1, 1, 0)$, $B = (1, 0, 1)$, C 에 대하여 다음 물음에 답하시오.
- (a) (10점) 원점과 세 점 A, B, C 을 꼭지점으로 하는 사면체의 부피가 최대가 되는 단위구 상의 점 C 를 모두 구하시오.
 - (b) (10점) (a)의 각 점 C 에 대하여, 두 점 A, B 와 C 를 포함하는 평면과 원점 사이의 거리를 모두 구하시오.

(풀이)

강좌번호:

학번:

이름:

문제 10. (20점) 선형사상 $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ 이 3차원 공간 $\mathbb{R}^3$ 의 영이 아닌 세 벡터 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 에 대하여

$$L(\mathbf{a}) = \mathbf{a}, \quad L(\mathbf{b}) = 3\mathbf{b}, \quad L(\mathbf{c}) = 5\mathbf{c}$$

를 만족할 때 다음 물음에 답하시오.

- (a) (10점) 세 벡터 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 가 일차독립임을 보이시오.
- (b) (10점) 선형사상 L 에 대응하는 행렬의 행렬식을 구하시오.

(풀이)

강좌번호:	학번:	이름:
-------	-----	-----

문제 11. (25점) 3차원 공간 $\mathbb{R}^3$ 의 이급곡선 $X(t)$ 가 모든 $t \in \mathbb{R}$ 에 대하여

$$|\mathbf{X}(t)| = 2, \quad |\mathbf{X}'(t)| = 1, \quad |\mathbf{X}''(t)| = 3$$

를 만족할 때 다음 물음에 답하시오.

- (a) (5점) $\mathbf{X}(t)$ 와 $\mathbf{X}'(t)$ 가 수직임을 보이시오.
- (b) (10점) $|\mathbf{X}(t) \times \mathbf{X}''(t)|$ 의 값을 구하시오.
- (c) (10점) $|\det (\mathbf{X}'(t) \quad \mathbf{X}(t) \quad \mathbf{X}''(t))|$ 의 값을 구하시오.

(풀이)