$p(x)=\alpha_1 \underset{\vec{v}_1}{1}+\alpha_2 \underset{\vec{v}_2}{x}+\alpha_3 \underset{\vec{v}_3}{x^2}$

$\therefore [p(x)]_B=\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{bmatrix}$

$q_c(x)=\beta_1\vec{w}_1+\beta_2\vec{w}_2+\beta_3\vec{w}_3$

$=a_1 1+a_2(x+1)+a_3(x^2+x+2)$

$=a_1+a_2x+a_2+a_3x^2+a_3x+2a_3$

$=\underbrace{(a_1+a_2+2a_3)}_{\beta_1}+\underbrace{(a_2+a_3)}_{\beta_2}x+\underbrace{a_3}_{\beta_3}x^2$

$\rightarrow [q_c(x)]_C=\begin{bmatrix}a_1+a_2+2a_3\\ a_2+a_3\\ a_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&2\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$

예제 3.1 $V=P_2$ 의 기저를 $B=\{\overset{\vec{v}_1}{1},\ \overset{\vec{v}_2}{x},\ \overset{\vec{v}_3}{x^2}\}$, $C=\{1,\ x+1,\ x^2+x+2\}$ 라고 하자.

(1) 각 $r(x)\in V$ 에 대해 $P[r(x)]_B=[r(x)]_C$ 를 만족하는 추이행렬 P를 구하여라.

(2) (1)의 결과를 이용하여 $r(x)=1-2x+3x^2$ 일 때, $[r(x)]_C$ 를 구하여라.

(풀이)

(1) $[\vec{v}]_C=P[\vec{v}]_B$ 이용

$=[[\vec{v}_1]_C\cdots[\vec{v}_n]_C]\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{bmatrix}$

$\vec{v}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&2\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix}$

$\Rightarrow\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&2&1\\0&1&1&0\\0&0&1&0\end{array}\right]$

$\rightarrow\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{array}\right]$

$\rightarrow\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{array}\right]$

$a_1=1\quad a_2=0\quad a_3=0$

$\therefore[\vec{v}_1]_C=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$

(질문 1) $p(x)$의 α 와

$q_c(x)$의 a는 다르게 보는게 맞나요?

(질문 2)

$\vec{v}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$ 이 의미하는게 $[p(x)]_B=\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$ 이 맞나요?

예제 3.2 $V=P_2$ 이고 $T: V\to V$를 다음과 같이 정의된 선형변환이라고 하자.

$$T(a_0+a_1x+a_2x^2)=(a_1-2a_2)+(2a_0+3a_2)+2a_2x^2$$

V의 두 (순서)기저를 $B=\{1,\ x,\ x^2\}$, $C=\{1+x,\ 1-x,\ x+x^2\}$ 라고 하자. $[T]_B$ 와 $[T]_C$를 구하여라.