⟨예제 2.5⟩ 102P

$$T : V \longrightarrow W$$

$X=(x_1, x_2) = R^2$

$T(x_1, x_2) = (x_2,\ x_1+x_2,\ x_1-x_2) = R^3$

R^2의 순서기저 $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ (=V의 순서기저) $= \{\vec{v}_1=(1,2),\ \vec{v}_2=(3,1)\}$

R^3의 순서기저 $C = \{\vec{w}_1=(1,0,0),\ \vec{w}_2=(1,1,0),\ \vec{w}_3=(1,1,1)\}$ (=W의 순서기저)

C의 순서기저의 좌표행렬 / B-C로 가는 순서기저의 좌표행렬

$$\Rightarrow [\vec{w}]_C = [T]_B^C [\vec{v}]_B$$

$$\left(단,\ [T]_B^C = \Big[\underbrace{[T(\vec{v}_1)]_C}_{\vec{w}} \cdots\cdots [T(\vec{v}_n)]_C\Big]\right)$$

(+) $[T(\vec{v}_1)]_C$: ($\overset{\vec{w}_1}{\overset{\parallel}{T(\vec{v}_1)}}$인 함수값에 대한 $\vec{w}$와의 일차결합으로 표현되어지는 순서기저 C) 의 좌표행렬

(풀이)

$$[T(\vec{v}_1)]_C = T(1,2) = [(2,3,-1)]_C$$

$$[T(\vec{v}_1)]_C = a_{11}\vec{w}_1 + a_{21}\vec{w}_2 + a_{31}\vec{w}_3$$

$$= a_{11}\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} + a_{21}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} + a_{31}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_{11}\\a_{21}\\a_{31}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\3\\-1\end{bmatrix}$$

$$= \left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&2\\0&1&1&3\\0&0&1&-1\end{array}\right]$$

기본행변환

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c}1&0&0&-1\\0&1&0&4\\0&0&1&-1\end{array}\right]$$

$$\begin{bmatrix}a_{11}\\a_{21}\\a_{31}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1\\4\\-1\end{bmatrix} = [T(\vec{v}_1)]_C$$

$$[T(\vec{v}_2)]_C = T(3,1) = [(1,4,2)]_C$$

$$= a_{12}\vec{w}_1 + a_{22}\vec{w}_2 + a_{32}\vec{w}_3$$

$$= \begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_{12}\\a_{22}\\a_{32}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\4\\2\end{bmatrix}$$

기본행변환

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c}1&0&0&-3\\0&1&0&2\\0&0&1&2\end{array}\right]$$

$$\therefore \begin{bmatrix}a_{12}\\a_{22}\\a_{32}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-3\\2\\2\end{bmatrix} = [T(\vec{v}_2)]_C$$

$$\boxed{\therefore [T]_B^C = \begin{bmatrix}-1&-3\\4&2\\-1&2\end{bmatrix}}$$

(질문 1)

V ⟶ R로 가는 선형변환은

V에서의 선형결합

$\alpha_1\vec{v}_1 + \cdots \alpha_n\vec{v}_n$에 의해 W를 표현한다 이렇게 식을 세워야 하는데

어떻게 $a_{11}\vec{w}_1 + a_{21}\vec{w}_2 + a_{31}\vec{w}_3$ 로 표현되는 것 인가요?

$\boxed{\text{Tip}}$ 계산할때 $\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&\square\\0&1&1&\square\\0&0&1&\square\end{array}\right]$

변하지 않고 계속 들어간다

$$\therefore \left[\begin{array}{ccc|cc}1&1&1&2&1\\0&1&1&3&4\\0&0&1&-1&2\end{array}\right]$$ 로 바로 계산하면 된다

$I \qquad [B]_B^C$