

서문

고등학교에서 배운 기본적인 2 차 정방행렬(또는 정사각행렬)에 대한 사항을 보다 심화 시켜서 $m \times n$ 차 연립일차방정식에 대한 풀이와 행렬과의 연관성에 대해서 배운다. 또한 다양한 행렬의 성질 및 벡터공간, 선형사상, 내적공간과 직교화, 고윳값과 대각화, 복소벡터공간 등에 대한 성질과 응용을 다루고 익힌다.

본 『선형대수학』 교재에서는 “제 1장 연립일차방정식과 행렬 ~ 제 7장 복소벡터공간” 까지 선형대수학의 주요 내용을 다루고 있다.

우리가 『선형대수학』에서 배울 주요내용 및 특징은 아래와 같다.

〈1〉 연립일차방정식과 행렬(System of Linear equations & Matrices)

- ✓ 선형대수학의 기초과정으로 연립일차방정식의 해법에 관한 내용을 중심으로 배우고 익힌다.
- ✓ 가우스소거법을 토대로 역행렬과 행렬의 LU분해를 배우고 익힌다.

〈2〉 행렬식(Determinant)

- ✓ 행렬식의 정의 및 의미를 이해하고 배운다.
- ✓ 행렬식의 주요한 성질을 배운다.
- ✓ 크래머 규칙(Cramer's rule)을 이용하여 연립일차방정식의 해를 구하는 방법이나 역행렬을 구하는 방법을 배우고 익힌다.

〈3〉 벡터공간(Vector Space)

- ✓ n 차원 실수공간을 기반으로 벡터(vector)와 벡터공간(vector space)의 정의 및 의미를 배운다. 또한, 일반적인 벡터와 벡터공간에 대한 정의에 대해서도 배우고 익힌다.
- ✓ 벡터공간상에서의 기저(basis)와 좌표(coordinates)를 정의하고 이들의 주요한 성질을 배운다.
- ✓ 연립일차방정식과 관련된 행렬의 행공간(Row space)과 열공간(Column space), 영공간(Null space)의 정의 및 주요한 성질을 익히고 배운다.

〈4〉 선형사상(선형변환: Linear Transformation)

- ✓ 벡터공간(Vector space)상에서의 선형사상(Linear transformation)을 정의하고, 그 의미와 주요한 성질을 배운다.
- ✓ 벡터공간에서 정의된 선형사상과 행렬의 연관성에 대해서 배운다.
- ✓ 또한, 선형사상을 이용한 기저의 변환(change of bases)과 행렬의 닮음에 대한 주요한 내용을 익히고 배운다.

〈5〉 내적공간과 직교화(Inner Product Space and Orthogonalization)

- ✓ 내적공간(Inner product space)은 벡터에 직교성(orthogonality)을 부여된 중요한 공간이다. 따라서 내적공간의 정의와 주요한 성질들을 익히고 배운다.
- ✓ 내적공간에서 그람-슈미트 직교화 과정(Gram-Schmidt orthogonalization process) 및 하우스홀더 변환(Householder transformation)과 이에 따른 행렬의 QR 분해(QR decomposition)를 배운다.
- ✓ 과결정시스템(over-determinate system of linear equations) 문제를 해결하기 위한 최소제곱방법(the least squares method)과 행렬의 QR 분해를 이용하여 데이터 해석에 관한 최적화기법에의 활용을 배운다.

〈6〉 고윳값과 대각화(Eigenvalue and Diagonalization)

- ✓ 행렬의 고윳값과 고유벡터는 행렬의 구조적인 특성을 견인하는 핵심적인 장치이다. 따라서 행렬의 고윳값과 고유벡터의 정의 및 의미, 주요한 성질을 배운다.
- ✓ 또한, 행렬의 대각화와 여러 응용문제, 이차형식의 기하학적 표현, 양의 정부호 행렬에 대한 특성과 쉐레스키 분해(Cholesky Decomposition)를 배운다.

〈7〉 복소벡터공간(Complex Vector Space)

- ✓ 일반적으로 성분이 실수인 실행렬의 고윳값은 복소수를 가질 수 있다. 따라서 복소수를 성분으로 갖는 복소행렬을 정의하고 복소행렬의 다양한 성질을 배우고 익힌다.
- ✓ 복소벡터공간에서의 에르미트행렬, 유니타리행렬, 정규행렬 등에 관한 스펙트럼 정리와 행렬의 닮음 관계 및 행렬의 특이값분해를 배운다.

부디 이 교재를 통해서 『선형대수학』의 내용을 정확히 이해하고 목표하는 결과의 성취가 있기를 바랍니다.

CONTENTS

01 연립일차방정식과 행렬	7
1.1 연립일차방정식	8
1.2 행렬과 행렬연산	12
1.3 가우스 소거법(Gauss Elimination Method)	23
1.4 역행렬과 연립일차방정식	31
1.5 블록행렬	37
1.6 행렬의 LU 분해와 연립일차방정식	40
02 행렬식	43
2.1 행렬식	44
2.2 행렬식의 성질	48
2.3 수반행렬(Adjoint matrix)	57
2.4 크래머의 공식(Cramer's rule)	60
03 벡터공간	63
3.1 벡터와 벡터공간	64
3.2 기저(Basis)와 차원(Dimension)	73
3.3 행공간과 열공간	80
04 선형변환	89
4.1 선형변환(선형사상)	90
4.2 선형변환과 행렬	99
4.3 기저의 변환과 행렬의 닮음	116
05 내적공간과 직교화	121
5.1 내적공간	122
5.2 직교성과 그람-슈미트 직교화 과정	134
5.3 최소제곱문제	142

06 고윳값과 대각화	147
6.1 고윳값과 고유벡터	148
6.2 행렬의 대각화	164
6.3 이차형식	191
6.4 양의 정부호 행렬과 출레스키 분해	201
 07 복소벡터공간	205
7.1 복소벡터공간 및 유니타리 공간	206
7.2 복소행렬	211
7.3 행렬의 특이값분해	210
 정답	223

PART

+

-

×

÷

01

연립일차방정식과 행렬 (Linear equations & Matrices)

1.1 연립일차방정식(Simultaneous linear equations)

1.2 행렬과 행렬연산(Matrices & Matrices operations)

1.3 가우스 소거법(Gauss Elimination Method)

1.4 역행렬과 연립일차방정식
(Inverse matrix & Simultaneous linear equations)

1.5 블록행렬(Block matrices)

1.6 행렬의 LU 분해와 연립일차방정식
(LU -decomposition & Simultaneous linear equations)

1.1

1. 연립일차방정식(System of linear equations)

과학이나 공학에서 발생하는 중요한 수학적 모형으로 여러 개의 미지수를 포함하는 **연립일차방정식** (simultaneous linear equations)의 **해**(solution)를 구하는 문제가 자주 거론된다. **『연립일차방정식의 해의 구조와 해법에 관한 문제는 선형대수학(linear algebra)의 가장 중요한 주제』**이다.

(1) 일차방정식(linear equation)

n 개의 미지수 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 을 갖는 일차방정식은 다음과 같다.

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

여기서, b 와 a_i 는 주어진 실수이고 a_i 는 미지수(variable) x_i 의 계수(coefficient)라고 한다.

[참고] 변수(variables)는 **주요변수**(leading variables)와 **자유변수**(free variables)가 있다.

(2) $m \times n$ 연립일차방정식(simultaneous linear equations)

일반적으로 n 개의 미지수 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 에 대한 m 개의 일차방정식으로 구성된 다음과 같은 방정식의 모임을 $m \times n$ **연립일차방정식**(simultaneous linear equations) 또는 **선형연립방정식**(system of linear equations)이라고 한다.

$$(*) \quad \dots\dots \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

① $b_i = 0, \forall i = 1:m \Rightarrow (*)$ 를 **제차방정식**(homogeneous equations)이라한다.

② $\exists b_i \neq 0 \Rightarrow (*)$ 를 비제차방정식(inhomogeneous equations)이라한다.

2. 방정식의 해(solution)

(1) 정의

$x_1 = s_1, x_2 = s_2, \dots, x_n = s_n$ 이 주어진 방정식을 만족시키면 이것을 **방정식의 해(solution)**, 또는 **특수해(particular solution)**라고 한다.

(2) 해의 종류

- ① 특수해(particular solution) : 방정식의 해 중의 하나의 해.
- ② 일반해(general solution) : 방정식의 해 전체의 집합.
- ③ **자명한 해(trivial solution)** : 제차방정식의 해 중에서 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ 인 해.
- ④ **자명하지 않은 해(nontrivial solution)** : 모두 0 이 아닌 제차방정식의 해.

(3) 무모순(consistent) $\Leftrightarrow$ 방정식의 해가 존재 할 때.

(4) 모순(inconsistent) $\Leftrightarrow$ 방정식의 해가 존재 하지 않을 때.

3. 연립방정식의 풀이

(1) 동치(equivalent)

같은 미지수를 포함하는 두 연립방정식의 해가 일치하면 두 연립방정식은 서로 **동치**(equivalent)라고 한다.

[참고] 연립방정식의 해는 방정식을 동치인 방정식으로 전환하여 해를 구하는 방법을 사용한다.

이를 이용한 방법으로 **거꾸로 풀기**(backward solving), **앞으로 풀기**(forward solving), **가우스 소거법**(Gauss elimination method), **가우스-조르당 소거법**(Gauss-Jordan elimination method) 등이 있다.

(2) 연립방정식의 기본연산(elementary operations of simultaneous linear equations)

방정식을 동치인 방정식으로 단순화하기 위해 사용하는 **기본연산**은 다음과 같다.

(S1) $S_i \leftrightarrow S_j$: i 번째 방정식과 j 번째 방정식의 교환

(S2) $cS_i \rightarrow S_i$: i 번째 방정식에 상수 c 를 곱한다.

(S3) $S_i + cS_j \rightarrow S_i$: j 번째 방정식에 상수 c 를 곱한 후 i 번째 방정식에 더한다.

개념 및 내용

예제 1.1 다음 각 연립일차방정식의 해를 구하고, 그 기하학적 의미를 조사하여라.

$$(1) \begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} x + y = 2 \\ 2x + 2y = 4 \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} x + y = 2 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

예제 1.2 다음 연립일차방정식의 해를 구하여라.

$$\begin{cases} 2x_2 + x_3 = 3 \\ -2x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

예제 1.3 다음 연립일차방정식의 해를 구하여라.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 2 \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 5 \\ 5x_1 + 10x_2 - 8x_3 + 11x_4 = 12 \end{cases}$$

예제 1.4 x_1, x_2, x_3 이 아래 주어진 연립일차방정식을 만족할 때 다음을 구하여라.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 = 5 \end{cases}$$

- (1) $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$ 일 때, $y = x_1 + 3x_2 - x_3$ 의 최댓값과 최솟값은?
 (2) $y = (x_1 - 2)^2 + (x_2 + 1)^2 + (x_3 - 3)^2$ 의 최댓값과 최솟값은?

1.2 행렬과 행렬연산(Matrices & Matrices operations)

1. 행렬의 개념 및 정의(Concepts and definition of matrix)

행렬(matrix)은 수(또는 변수, 함수 등)를 직사각형 형태로 배열한 것이다.

(1) $m \times n$ 행렬(m by n matrix)

$$A = [a_{ij}]_{m \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

① A 를 $m \times n$ 행렬이라 하고 $m \times n$ 는 행렬 A 의 크기(size)라 한다.

② 행렬 A 의 가로줄을 행(row), 세로줄을 열(column)

③ a_{ij} 는 행렬 A 의 (i, j) -원소(element), 또는 성분(entry).

④ $A_{(i)} := [a_{i1} \ a_{i2} \ \cdots \ a_{in}]$: 행렬 A 의 i 번째 $1 \times n$ 행벡터(row vector)

⑤ $A^{(j)} := \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}$: 행렬 A 의 j 번째 $m \times 1$ 열벡터(column vector)

⑥ $A = \begin{bmatrix} A_{(1)} \\ A_{(2)} \\ \vdots \\ A_{(m)} \end{bmatrix} = [A^{(1)} \ A^{(2)} \ \cdots \ A^{(m)}]$: 행렬 A 의 행벡터 표현과 열벡터 표현.

⑦ $m = n \Rightarrow$ 행렬 $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ 를 n 차 정방행렬 또는 정사각행렬(square matrix)이라 한다.

또한, $a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}$ 을 A 의 주대각 원소(main diagonal elements)라 한다.

(2) 행렬의 집합 $M_{m,n}(\mathbb{R}) = M_{m,n}$

① $M_{m,n}(\mathbb{R}) := \{A \mid A = [a_{ij}]_{m \times n}, a_{ij} \in \mathbb{R}\}$: $m \times n$ 행렬들의 집합.

② $m = n \Rightarrow M_{n,n} = M_n$: 정사각행렬의 집합.

(3) 행렬의 상등(equal)

$A = [a_{ij}], B = [b_{ij}] \in M_{m,n}$ 일 때, A 와 B 의 원소가 같을 때 두 행렬은 상등(equal)이라 하고 다음과 같이 정의한다.

$$A = B \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij}, \forall i, j$$

(4) 영행렬(zero matrix)

$$O = [o_{ij}] \in M_{m,n} : \text{영행렬(zero matrix)} \Leftrightarrow o_{ij} = 0, \forall i, j$$

2. 행렬의 연산(Matrices operations)

행렬(matrix)을 수학적 대상으로 다루기 위해 필요한 기본연산인 덧셈, 뺄셈, 상수배(또는 스칼라 곱), 곱셈 등을 정의하고 그 성질을 알아보자.

(1) 덧셈과 뺄셈(Sum and subtraction)

$A = [a_{ij}], B = [b_{ij}] \in M_{m,n}$ 일 때,

① 덧셈:

$$A + B = [a_{ij}] + [b_{ij}] := [a_{ij} + b_{ij}]$$

② 뺄셈:

$$A - B = [a_{ij}] - [b_{ij}] := [a_{ij} - b_{ij}]$$

③ 기본성질

$A, B, C \in M_{m,n}$ 일 때, 다음이 성립한다.

- | | |
|---------------------------------|--------------|
| (1) $A + B = B + A$ | (교환) |
| (2) $(A + B) + C = A + (B + C)$ | (결합) |
| (3) $A + O = A$ | (덧셈에 대한 항등원) |
| (4) $A + (-A) = O$ | (덧셈에 대한 역원) |

(2) 상수 배 또는 스칼라 곱(scalar multiplication)

① 정의

$A = [a_{ij}] \in M_{m,n}$ 이고 $k \in \mathbb{R}$ 일 때, 다음과 같이 정의한다.

$$kA = k[a_{ij}] := [ka_{ij}] = \begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{bmatrix}$$

② 기본성질

$A, B \in M_{m,n}$ 이고 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ 일 때, 다음이 성립한다.

- | | |
|--|--|
| (1) $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$ | (2) $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$ |
| (3) $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A) = \beta(\alpha A)$ | (4) $1A = A$ |

(3) 행렬의 곱셈(multiplication of matrices)

두 행렬 $A = [a_{ik}] \in M_{m,p}$, $B = [b_{kj}] \in M_{p,n}$ 일 때, 행렬 A 와 B 의 곱 AB 를 다음과 같이 정의한다.

$$AB := [c_{ij}] \in M_{m,n}, \quad c_{ij} := a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ip}b_{pj} = \sum_{k=1}^p a_{ik}b_{kj}$$

[주의] $AB \neq BA$ (교환법칙이 성립하지 않음)

3. 행렬의 곱에 대한 성질

(1) 행벡터와 열벡터를 통한 행렬의 곱셈 표현

$A = [a_{ik}] \in M_{m,p}$, $B = [b_{kj}] \in M_{p,n}$ 일 때, 다음이 성립한다.

$$\textcircled{1} A_{(i)}B^{(j)} = [a_{i1} \ a_{i2} \ \cdots \ a_{ip}] \begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{pj} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^p a_{ik}b_{kj}$$

$$\textcircled{2} (AB)_{(ij)} = A_{(i)}B^{(j)}$$

$$\textcircled{3} AB = \begin{bmatrix} A_{(1)}B^{(1)} & A_{(1)}B^{(2)} & \cdots & A_{(1)}B^{(n)} \\ A_{(2)}B^{(1)} & A_{(2)}B^{(2)} & \cdots & A_{(2)}B^{(n)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{(m)}B^{(1)} & A_{(m)}B^{(2)} & \cdots & A_{(m)}B^{(n)} \end{bmatrix}$$

$$\textcircled{4} (AB)_{(i)} = A_{(i)}B, \quad (AB)^{(j)} = AB^{(j)}$$

(2) 전치행렬(transpose matrix)

① 정의

행렬 A 의 행과 열을 교환해서 얻은 행렬을 A 의 **전치행렬**(transpose matrix)이라하고 A^t 또는 A^T 로 표기한다.

$$A = [a_{ij}] \in M_{m,n} \Leftrightarrow A^t = [\hat{a}_{ij}] \in M_{n,m}, \quad \hat{a}_{ij} = a_{ji}$$

② 기본성질

$A, B \in M_{m,n}$ 이고 $k \in \mathbb{R}$ 일 때, 다음이 성립한다.

$$\textcircled{1} (A^t)^t = A$$

$$\textcircled{2} (A \pm B)^t = A^t \pm B^t$$

$$\textcircled{3} (kA)^t = kA^t$$

(3) 행렬의 곱에 대한 성질

$$\textcircled{1} A, B \in M_{m,p} \text{ 이고 } C \in M_{p,n} \text{ 이면 } (A \pm B)C = AC \pm BC. \quad (\text{분배법칙})$$

$$\textcircled{2} A \in M_{m,p}, B \in M_{p,q} \text{ 이고 } C \in M_{q,n} \text{ 이면 } (AB)C = A(BC). \quad (\text{결합법칙})$$

$$\textcircled{3} A \in M_{m,p}, B \in M_{p,n} \text{ 이면 } (AB)^t = B^t A^t. \quad (\text{곱의 전치})$$

(4) 주의 해야 할 행렬의 곱의 성질

다음 명제들은 성립하지 않는다.

- ① $A^2 = O$ 이면 $A = O$ 이다. (거짓)
- ② $AB = O$ 이면 $A = O$ 또는 $B = O$ 이다. (거짓)
- ③ $A(B + C) = O$ 이면 $A = O$ 또는 $B + C = O$ 이다. (거짓)
- ④ $AC = BC$ 이면 $A = B$ 또는 $C = O$ 이다. (거짓)
- ⑤ $AB = AC$ 이고 $A \neq O$ 이면 $B = C$ 이다. (거짓)

4. 정방행렬의 대각합(Trace)

(1) 정의

$A = [a_{ij}] \in M_n$ 의 주대각 원소들의 합을 A 의 **대각합**(trace)라 하고 $tr(A)$ 로 나타낸다. 즉,

$$tr(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii} = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$$

(2) 기본성질

$A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}] \in M_n$ 와 $k \in \mathbb{R}$ 에 대하여 다음이 성립한다.

- ① $tr(A^t) = tr(A)$ ② $tr(A \pm B) = tr(A) \pm tr(B)$
- ③ $tr(kA) = ktr(A)$ ④ $tr(AB) = tr(BA)$

[참고] $A = [a_{ij}] \in M_{m,n}$ 일 때, $tr(AA^t) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij}^2$.

5. 행렬의 거듭제곱과 대각행렬 및 특수행렬

(1) 행렬 A 의 거듭제곱

$A = [a_{ij}] \in M_n$ 이고 $k \in \mathbb{N}$ (자연수의 집합)일 때, A 의 k 제곱 A^k 을 다음과 같이 정의한다.

$$A^k := AA \cdots A \quad (A \text{의 } k \text{제곱})$$

(2) 대각행렬(diagonal matrix)

$A = [a_{ij}] \in M_n$: 대각행렬(diagonal matrix) $\Leftrightarrow a_{ij} = 0, \forall i \neq j$

(3) 단위행렬(identity matrix)

$I_n := [\delta_{ij}] \in M_n$: 단위행렬(identity matrix) $\Leftrightarrow \delta_{ij} := \begin{cases} 1, & (i = j) \\ 0, & (i \neq j) \end{cases}$

[참고] δ_{ij} : 크로네커기호(Kronecker symbol)

(4) 상부삼각행렬(Upper triangular matrix)

$U = [u_{ij}] \in M_n$: 상부삼각행렬(upper triangular matrix) $\Leftrightarrow u_{ij} = 0, \forall i > j$

(5) 하부삼각행렬(Lower triangular matrix)

$L = [l_{ij}] \in M_n$: 하부삼각행렬(lower triangular matrix) $\Leftrightarrow l_{ij} = 0, \forall i < j$

[참고] 단위 하부삼각행렬(Unit lower triangular matrix) : 주 대각원이 모두 1인 하부삼각행렬

(6) 대칭행렬(Symmetric matrix)

$A = [a_{ij}] \in M_n$: 대칭행렬(symmetric matrix) $\Leftrightarrow A^t = A$

[참고] 주대각원소를 중심으로 원소들이 대칭인 배열을 한다.

(7) 비대칭(또는 반대칭)행렬(Skew symmetric matrix)

$A = [a_{ij}] \in M_n$: 비대칭행렬(skew symmetric matrix) $\Leftrightarrow A^t = -A$

[참고] 주대각원소를 중심으로 원소들이 부호가 반대인 배열을 하고, 주대각원소는 모두 0이다.

(8) 정방행렬의 대칭행렬과 비대칭행렬의 합으로의 분해

$A = [a_{ij}] \in M_n$ 일 때, 다음이 성립한다.

① $A + A^t$: 대칭행렬

② $A - A^t$: 비대칭행렬

③ $A = \frac{1}{2}(A + A^t) + \frac{1}{2}(A - A^t)$

[참고] 「정방행렬은 항상 대칭행렬과 비대칭행렬의 합으로 분해」할 수 있다.

예제 2.1 2×2 행렬

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

에 대하여 각각 다음을 구하여라.

(1) $A + B, A - C, 2B - \frac{1}{2}C, A - 3D$

(2) $A + E = B$ 인 행렬 E

(3) $AB, BA, (A + B)C, (AB)C, A(BC)$

(4) AD, DA

(5) $A^t B^t, (AB)^t, B^t A^t$

(6) $A^2, B^2, A^2 B, AB^2$

예제 2.2 행렬 $A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 에 대하여 A^{-1} , A^n , $(A^n)^{-1}$, $(A^{-1})^n$ 을 구하여라.

예제 2.3 A 와 B 는 임의의 2×2 행렬이다. 다음 명제들 중 옳은 것을 모두 고르시오. (이화여대 2013)

ㄱ. $AB = BA$

ㄴ. $A^2 = O$ 이면 $A = O$ 이다.

ㄷ. $(AB)C = A(BC)$

ㄹ. $AC = BC$ 이면 $A = B$ 혹은 $C = O$ 이다.

① ㄴ

② ㄱ, ㄷ

③ ㄴ

④ ㄷ

⑤ ㄴ, ㄹ

예제 2.4 k 가 스칼라이고 A 와 B 가 $n \times n$ 행렬, 그리고 A 와 B 의 전치행렬(transpose)을 각각 A^T 와 B^T 로 나타낼 때, 다음 중 옳지 않은 것은? (한국항공대 2012)

① $(A^T)^T = A$

② $(A + B)^T = A^T + B^T$

③ $(AB)^T = A^T B^T$

④ $(kA)^T = kA^T$

예제 2.5 다음 행렬 A 의 전치행렬(transpose) A^T 에 대하여 트레이스(trace) $tr(AA^T)$ 의 값은?(한양대 2012)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

① 0

② 4

③ 10

④ 16

예제 2.6 2×2 행렬 $A = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$ 에 대하여 $A^T = \begin{bmatrix} x & z \\ y & w \end{bmatrix}$ 라고 정의할 때 다음 설명 중에서 옳은 것을 모두 고르면? (여기서 x, y, z, w 는 모두 실수이다.)(광운대 2011)

- ① 임의의 2×2 행렬 B 에 대하여 $(B + B^T)^T = B + B^T$ 이다.
 ② 임의의 2×2 행렬 B 와 C 에 대하여 $(BC)^T = (BC)$ 이면 $BC = CB$ 이다.
 ③ 임의의 2×2 행렬 B 와 C 에 대하여 $(BC)^T = B^T C^T$ 이다.

① a

② b

③ c

④ a, b

⑤ b, c

예제 2.7 정방행렬 $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ 의 전치행렬(transpose) A^T 에 대하여 행렬 $A - A^T$ 의 전치행렬은?(한양대 에리카 2012)

① $-A + A^T$ ② $-A - A^T$ ③ $A - A^T$ ④ $A + A^T$

예제 2.8 행렬 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \\ -3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ 에 대하여 $B = 10A + 9A^T$ 의 전치행렬(transpose) B^T 는?(경기대 2013)

- ① $-2A$ ② $-A$ ③ A ④ $2A$

예제 2.9 행렬 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ 는 대칭행렬(symmetric matrix) S 와 반대칭행렬(skew-symmetric matrix) T

의 합으로 표현될 수 있다. 이 때 반대칭행렬 T 를 구하시오. (단국대 2011)

예제 2.10 $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -7 & -4 \end{bmatrix}$ 일 때 A^{100} 을 구하시오. (홍익대 2008)

- ① $\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -7 & -5 \end{bmatrix}$ ② $\begin{bmatrix} -5 & -3 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}$ ③ $\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -7 & -4 \end{bmatrix}$ ④ $\begin{bmatrix} -4 & -3 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}$

6. 역행렬(Inverse matrix)

$A = [a_{ij}] \in M_n$: **가역행렬**(invertible matrix) $\Leftrightarrow \exists B \in M_n$ s.t. $AB = I_n = BA$.

이 때, 행렬 B 를 A 의 **역행렬**(inverse matrix)이라 하고, $B := A^{-1}$ 로 나타낸다.

7. 역행렬의 성질

$A, B \in M_n$ 을 가역행렬(invertible matrix)이라 하자.

(1) A 의 역행렬은 유일하다.

(2) A^{-1} 는 가역(invertible)이고 $(A^{-1})^{-1} = A$ 이다.

(3) AB 는 가역이고 $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ 이다.

(4) $(A^{-1})^k = (A^k)^{-1}, \quad \forall k \in \mathbb{N}$

(5) $\alpha (\neq 0) \in \mathbb{R}, (\alpha A)^{-1} = \frac{1}{\alpha} A^{-1}$ 이다.

(6) A^t 는 가역이고 $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t := A^{-t}$ 이다.

개념 및 내용

예제 2.11 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ 일 때 A^{-1} 을 구하시오. (홍익대 2008)

① $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

② $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

③ $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

④ $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

예제 2.12 다음 행렬의 성질 중 항상 성립하는 성질이 아닌 것은? (홍익대 2010)

(단 A^{-1} 은 A 의 역행렬이고, A^T 은 A 의 전치행렬을 나타낸다.)

① $(A^{-1})^{-1} = A$

② $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$

③ $(A^2)^{-1} = (A^{-1})^2$

④ $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$

예제 2.13 $A^5 = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, $(A^{-1})^5 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 일 때 $a + b + c + d$ 를 계산하라. (홍익대 2007)

① 0

② 1

③ 2

④ 3

2. 기본행연산(Elementary Row Operations)

(E1) $A_{(i)} \leftrightarrow A_{(j)}$ (두 행의 교환. 즉, $R_i \leftrightarrow R_j$)

(E2) $kA_{(i)} \rightarrow A_{(i)}$ (상수 배. 즉, $kR_i \rightarrow R_i$)

(E3) $A_{(i)} + kA_{(j)} \rightarrow A_{(i)}$ (한 행에 상수 배 후 다른 행에 더함. 즉, $R_i + kR_j \rightarrow R_i$)

3. 행동치(Row equivalent)

$A, B \in M_{m,n}$ 일 때, 한 행렬이 다른 행렬에 기본행연산을 써서 구해진 것이면 A 와 B 를 **행동치**(row equivalent)라 하고 $A \sim_r B$ 로 나타낸다.

4. 기본행렬(Elementary matrices)

단위행렬(identity matrix) I_n 에 기본행연산을 적용하여 얻어진 행렬을 **기본행렬**(elementary matrices)이라고 한다. 기본행렬은 다음과 같은 세 가지가 있다.

(1) $E_{(i),(j)}$ = 단위행렬 I_n 에 **(E1)연산을 적용** 해서 얻어진 행렬

(2) $E_{k(i)}$ = 단위행렬 I_n 에 **(E2)연산을 적용** 해서 얻어진 행렬

(3) $E_{(i)+k(j)}$ = 단위행렬 I_n 에 **(E3)연산을 적용** 해서 얻어진 행렬

5. 기본행렬의 성질

$A = [a_{ij}] \in M_{m,n}$ & I_m 에 기본행연산을 적용해서 얻어진 기본행렬 $E_{(i),(j)}$, $E_{k(i)}$, $E_{(i)+k(j)}$ 에 대하여 다음이 성립한다.

(1) $E_{(i),(j)}A$ = 행렬 A 의 i 번째 행과 j 번째 행을 교환해서 얻어진 행렬.

(2) $E_{k(i)}A$ = 행렬 A 의 i 번째 행에 상수 $k \neq 0$ 을 곱해서 얻어진 행렬.

(3) $E_{(i)+k(j)}A$ = 행렬 A 의 j 번째 행에 상수 k 를 곱한 후 i 번째 행에 더해서 얻어진 행렬.

(4) **기본행렬은 모두 가역행렬**이다. 즉 $k \neq 0$ 에 대하여 다음이 성립한다.

$$(E_{(i),(j)})^{-1} = E_{(i),(j)}, \quad (E_{k(i)})^{-1} = E_{\frac{1}{k}(i)}, \quad (E_{(i)+k(j)})^{-1} = E_{(i)-k(j)}$$

6. 가우스 소거법(Gauss Elimination Method)

연립방정식의 해를 구하는 과정은 『기본행연산』을 적용하여 첨가행렬 $[A : b]$ 를 **행사다리꼴**로 변환시켜 이 사다리꼴행렬에 대응하는 연립방정식을 거꾸로 풀어나가는 과정과 동일하다. 이러한 방법으로 해를 구하는 과정을 **【가우스 소거법】**(Gauss elimination method)이라고 한다.

【가우스 소거법을 적용한 연립방정식의 풀이과정】

- (1) 일단계 : 연립방정식 $Ax = b$ 의 첨가행렬 $[A : b]$ 구성
- (2) 이단계 : 첨가행렬에 『기본행연산』을 적용하여 행동치인 **행사다리꼴**로 변환
- (3) 삼단계 : 행사다리꼴에 대응하는 연립방정식 구성
- (4) 사단계 : 거꾸로 풀기(backward solving)

7. 가우스-조르당 소거법(Gauss-Jordan Elimination Method)

연립방정식의 해를 구하는 과정은 『기본행연산』을 적용하여 첨가행렬 $[A : b]$ 를 **기약행사다리꼴**로 변환시켜 이 사다리꼴행렬에 대응하는 연립방정식을 거꾸로 풀어나가는 과정과 동일하다. 이러한 방법으로 해를 구하는 과정을 **【가우스-조르당 소거법】**(Gauss-Jordan elimination method)이라고 한다.

【가우스-조르당 소거법을 적용한 연립방정식의 풀이과정】

- (1) 일단계 : 연립방정식 $Ax = b$ 의 첨가행렬 $[A : b]$ 구성
- (2) 이단계 : 첨가행렬에 『기본행연산』을 적용하여 행동치인 **기약행사다리꼴**로 변환
- (3) 삼단계 : 기약행사다리꼴에 대응하는 연립방정식 구성
- (4) 사단계 : 거꾸로 풀기(backward solving)

개념 및 내용

예제 3.1 가우스 소거법을 사용하여 다음 연립일차방정식의 해를 구하여라.

$$\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + 4x_3 = -3 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 10 \end{cases}$$

예제 3.2 가우스-조르당 소거법을 사용하여 다음 연립일차방정식의 해를 구하여라.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 = 4 \\ 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 9x_4 = 16 \\ -2x_1 + \quad + 3x_3 - 7x_4 = 12 \end{cases}$$

예제 3.3 범위 $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq z \leq \pi$ 의 실수 x, y, z 가 다음 연립방정식을 만족할 때, $x + 2y + z$ 의 값은?(한양대 2012)

$$\begin{cases} \tan x - 2\sin y &= 2 \\ \tan x - \sin y + \cos z &= 2 \\ \sin y - \cos z &= -1 \end{cases}$$

① $\frac{\pi}{6}$

② $\frac{\pi}{4}$

③ $\frac{\pi}{3}$

④ $\frac{\pi}{2}$

예제 3.4 다음 일차연립방정식이 유일한 해를 가질 실수 a 의 조건이 아닌 것은?(한양대 2003)

$$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ -x + ay = 0 \end{cases}$$

① $a = 0$

② $a = 1$

③ $a = 2$

④ $a = -2$

예제 3.5 다음 연립방정식의 해가 존재하지 않는 c 값은?(경기대 2013)

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ x + 3y + 5z = 0 \\ y + cz = 1 \end{cases}$$

① -2

② -1

③ 1

④ 2

예제 3.6 다음 연립방정식이 해를 갖지 않도록 하는 a 의 값을 모두 구하면?(중앙대 2011)

$$\begin{cases} x + y + 7z = -7 \\ 2x + 3y + 17z = -16 \\ x + 2y + (a^2 + 1)z = 3a \end{cases}$$

① $a \neq \pm 3$

② $a = -3$

③ $a = 3$

④ $a = \pm 3$

예제 3.7 연립방정식 $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 2 \\ 3x_1 + (\alpha^2 - 4)x_3 = \alpha \end{cases}$ 이 해를 갖지 않게 하는 상수 α 의 값은?(서울과학기술대 2012)

① -1

② 1

③ 3

④ -3

예제 3.8 다음 연립 방정식이 무한개의 해를 갖기 위한 s, t 에 대한 조건을 구하면?(중앙대 2010)

$$\begin{cases} x + y + 3z = 2 \\ x + 2y + 2z = 3 \\ x + 3y + sz = t \end{cases}$$

① $s = 3, t = 2$

② $s = 3, t \neq 2$

③ $s = 1, t = 4$

④ $s = 1, t \neq 4$

예제 3.9 x, y, z 에 대한 연립방정식 $\begin{cases} x + 2y - 3z = a \\ 2x + 3y + 3z = b \\ 5x + 9y - 6z = c \end{cases}$ 의 해가 존재할 조건을 구하시오. (한양대 2005)

① $-3a - b + c = 0$

② $-3a + b - c = 0$

③ $3a + b + c = 0$

④ $-3a + b + c = 0$

예제 3.10 다음 연립방정식의 해가 존재하지 않는 $\mathbf{b}$ 는? (중앙대 공대 2012)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \mathbf{b}$$

① $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$

② $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$

③ $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

④ $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$

예제 3.11 연립방정식 $\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + ay + 2z = 0 \\ x - 2y + 2z = 0 \end{cases}$ 이 무한히 많은 해를 갖도록 하는 a 의 값은? (중앙대 1998)

① 2

② 1

③ -2

④ -1

예제 3.12 x, y, z 에 대한 선형 연립방정식이 무수히 많은 해를 갖게 되는 상수 a 의 값은?(아주대 2009)

$$\begin{cases} 4x + y + 5z = 0 \\ 14x + 4y + 17z = 0 \\ 6x + 2y + az = 0 \end{cases}$$

① -1 ② 1 ③ 3 ④ 5 ⑤ 7

예제 3.13 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ -2 & -3 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \end{bmatrix}$ 이 **행사다리꼴**(row echelon form) 행렬 B 에 대해 $A = E_1 E_2 B$ 를 만족하는

기본행렬 E_1 과 E_2 를 구하여라.

예제 3.14 다음을 만족하는 3차 다항식 $p(x)$ 를 구하여라.

$$p(1) = -1, \quad p'(1) = 3, \quad p(2) = 12, \quad p'(2) = 4$$

1.4 역행렬과 연립일차방정식

1. 정칙행렬과 특이행렬(regular matrix and singular matrix)

n 차 정방행렬 $A = [a_{ij}] \in M_n$ 를 계수행렬로 갖는 제차방정식 $A\mathbf{x} = \vec{0}$ 의 해(solution)와 관련하여 **정칙행렬**(regular matrix, 또는 nonsingular matrix)과 **특이행렬**(singular matrix)을 다음과 같이 정의한다.

- (1) $A = [a_{ij}] \in M_n$: **정칙행렬** $\Leftrightarrow A\mathbf{x} = \vec{0}$ 의 해가 **자명한 해**(trivial solution) 뿐일 때.
 (2) $A = [a_{ij}] \in M_n$: **특이행렬** $\Leftrightarrow A\mathbf{x} = \vec{0}$ 가 **자명하지 않은 해**(nontrivial solution)가 존재할 때.

2. 일차독립과 일차종속(linearly independent and linearly dependent)

$\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$: 벡터(vectors) & $\alpha_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, n$: 스칼라(scalar) 일 때 **일차결합**(또는 선형결합, linear combination), **일차독립**(linearly independent) 및 **일차종속**(linearly dependent)을 다음과 같이 정의한다.

- (1) $\sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{v}_i = \alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \dots + \alpha_n \vec{v}_n : \vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ 의 일차결합
 (2) $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$: **일차독립** $\Leftrightarrow \forall \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{v}_i = \vec{0} \Rightarrow \alpha_i = 0, \forall i$
 (3) $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$: **일차종속** $\Leftrightarrow \forall \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{v}_i = \vec{0} \Rightarrow \exists \alpha_i \neq 0$

3. 정칙행렬/특이행렬과 일차독립/종속과의 관계

$A = [a_{ij}] \in M_n$ 일 때, 다음이 성립한다.

- (1) A : **정칙행렬** $\Leftrightarrow \{A^{(1)}, A^{(2)}, \dots, A^{(n)}\}$: **일차독립**
 (2) A : **특이행렬** $\Leftrightarrow \{A^{(1)}, A^{(2)}, \dots, A^{(n)}\}$: **일차종속**

4. 정칙행렬과 가역행렬과의 관계

$A = [a_{ij}] \in M_n$ 일 때, 다음은 서로 **동치**이다.

- (1) A 는 **정칙행렬**이다.
 (2) A 의 열벡터 $\{A^{(1)}, A^{(2)}, \dots, A^{(n)}\}$ 은 **일차독립**이다.
 (3) A 의 행벡터 $\{A_{(1)}, A_{(2)}, \dots, A_{(n)}\}$ 은 **일차독립**이다.
 (4) $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 는 **유일한 해** $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$ 를 갖는다.
 (5) A 는 **가역행렬**이다.

5. 기본행연산을 이용한 역행렬 구하는 방법

n 차 정방행렬 $A = [a_{ij}] \in M_n$ 가 가역행렬일 때, A 의 역행렬 A^{-1} 를 구하는 방법은 두 가지가 있다. 첫 번째는 『기본행연산을 이용하는 방법』이고, 두 번째는 『 A 의 수반행렬(adjoint matrix) $\text{adj}(A)$ 를 이용한 방법』이다. 여기서는 기본행연산을 이용한 방법에 대해서 다루고 수반행렬은 행렬식 부분에서 다루도록 한다.

【기본행연산을 이용한 A 의 역행렬 A^{-1} 를 구하는 방법】

- (1) 일단계 : 첨가행렬 $[A : I_n]$ 를 구성한다.
- (2) 이단계 : $[A : I_n] \xrightarrow{\text{기본행연산}} [I_n : B]$ 변환시켜 $B = A^{-1}$ 을 구한다.

6. 역행렬 A^{-1} 를 기본행렬의 곱으로 표현하기

$A = [a_{ij}] \in M_n$ 가 가역일 때 A 와 A^{-1} 을 기본행렬의 곱으로 표현하는 방법은 다음과 같다.

【역행렬 A^{-1} 를 기본행렬의 곱으로 표현하기】

- (1) 일단계 : 첨가행렬 $[A : I_n]$ 를 구성한다.
- (2) 이단계 : $[A : I_n] \sim_r [I_n : B]$ 에 관여하는 기본행렬 $E_1, E_2, \dots, E_k$ 에 대해

$$\begin{aligned} E_k \cdots E_2 E_1 [A : I_n] &= [E_k \cdots E_2 E_1 A : E_k \cdots E_2 E_1 I_n] \\ &= [I_n : E_k \cdots E_2 E_1] \end{aligned}$$

- (3) 삼단계 : $A^{-1} = E_k \cdots E_2 E_1$ & $A = (A^{-1})^{-1} = (E_k \cdots E_2 E_1)^{-1} = E_1^{-1} E_2^{-1} \cdots E_k^{-1}$

개념 및 내용

예제 4.1 다음 주어진 행렬이 정칙행렬인지 특이행렬인지 조사하여라.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$$

예제 4.2 아래와 같이 주어진 행렬 A 가 정칙/특이를 판단하라. 또한 정칙이면 역행렬 A^{-1} 를 구하고, A 와 A^{-1} 를 기본행렬의 곱으로 나타내어라.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

예제 4.3 3차 정방행렬 $A \in M_3$ 에 대하여 $4A^{(1)} - A^{(2)} + 2A^{(3)} = \vec{0}$ 이 성립한다. A 의 역행렬이 존재하는지 조사하고, 방정식 $A\mathbf{x} = \vec{0}$ 의 해집합을 구하여라.

예제 4.4 다음 주어진 각 행렬이 정칙인지 조사하고 정칙이면 역행렬을 구하여라.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & -10 \\ 0 & -1 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 7 \\ 3 & 3 & 9 \end{bmatrix}$$

예제 4.5 다음 각 주어진 행렬 A 와 B 에 대해 $EA = B$ 인 기본행렬 E 를 구하여라.

$$(1) A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$$

$$(2) A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

예제 4.6 $\Delta = ad - bc$ 라 하자. 다음이 성립함을 보여라.

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \Delta I_2$$

따라서, $\Delta \neq 0$ 이면 2 차 정방행렬 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 는 가역이고 그 역행렬은 다음과 같다.

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

예제 4.7 두 행렬 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$ 라 할 때 다음을 구하여라.

(1) A^{-1} , B^{-1} , $(AB)^{-1}$

(2) $(AB)^{-1} \neq A^{-1}B^{-1}$ 임을 보여라.

예제 4.8 정칙행렬 A 에 대해 $(7A)^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -7 \end{bmatrix}$ 일 때, 행렬 A 는?

예제 4.9 A 를 $A^3 - 2A^2 + 3A - I_n = O$ 를 만족하는 n 차 정방행렬일 때, A 가 가역임을 보이고 A^{-1} 를 구하여라.

예제 4.10 A 가 가역일 때 연립일차방정식 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 의 해가 $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$ 로 주어진다는 사실을 사용하여 다음 주어진 연립일차방정식을 풀어라.

$$(1) \begin{cases} x_1 - 2x_2 = 5 \\ 4x_1 - x_2 = 10 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} 3x_1 - x_2 = 2 \\ x_1 - 3x_2 = 7 \end{cases}$$

예제 4.11 다음 주어진 각 연립방정식을 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 형태로 나타내고 A 의 역행렬과 연립방정식의 해를 구하여라.

$$(1) \begin{cases} x_1 + 2x_2 = -1 \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 3 \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 = 2 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} -x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_3 = 0 \\ 3x_1 - 4x_2 + 4x_3 = 2 \end{cases}$$

1.5 블록행렬(Block matrices)

1. 블록행렬(Block matrices)

주어진 행렬에서 특정한 부분의 원소가 0 이 많이 포함되어 있는 경우와 같이 경우에 따라 행렬을 부분행렬로 블록 (또는 구획)을 지어서 곱을 계산하는 것이 수월하고 편리한 경우가 많이 발생한다. 특히 수치해석학이나 응용수학에서 이러한 일이 빈번히 일어난다. 이와 같이 주어진 행렬을 수평과 수직으로 분할해서 부분행렬로 구성한 것을 **블록 행렬**(또는 **구획행렬**, Block matrix)이라고 한다.

예를 들면 주어진 3×4 행렬 A 에 대해서

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 2 & -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 6 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 2 & -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}, A_{12} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}, A_{21} = [0 \ 2 \ -3], A_{22} = [1]$$

은 주어진 행렬 A 를 부분행렬로 분할해서 구성한 블록행렬의 한 예이다.

2. 행렬의 곱을 블록행렬의 곱으로 표현하기

행렬 A, B, C 를 아래와 같이 부분행렬로 분할된 블록행렬이라 하자. 그러면 다음이 성립한다.

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1l} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{ml} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1n} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{l1} & B_{l2} & \cdots & B_{ln} \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{m1} & C_{m2} & \cdots & C_{mn} \end{bmatrix}$$

각각의 곱 $A_{ik}B_{kj}$ 가 잘 정의되고 $C_{ij} = \sum_{k=1}^l A_{ik}B_{kj}$ 이면 $C = AB$ 이다.

3. 블록행렬과 역행렬

$A \in M_n$ 의 블록행렬 $k < n$ 에 대해

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & O \\ O & A_{22} \end{bmatrix}, (A_{11} \in M_k)$$

인 대각행렬로 나타낼 때 A 가 가역일 필요충분조건은 A_{11}, A_{22} 가 가역일 때이다.

예제 5.1 행렬 A 가 아래와 같이 주어졌을 때 가역인지 조사하고 가역이면 그 역행렬 A^{-1} 을 구하여라.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

예제 5.2 각 부분행렬 $A_{ij} \in M_n$ 에 대해 A 를

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ O & A_{22} \end{bmatrix}$$

인 $2n \times 2n$ 블록행렬이라 하자.

(1) A_{11} 과 A_{22} 가 정칙이면 A 도 정칙임을 보이고 이때 그 역행렬은

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11}^{-1} & C \\ O & A_{22}^{-1} \end{bmatrix}$$

형태의 블록행렬로 주어짐을 보여라.

(2) C 를 결정하여라.

예제 5.3 다음 주어진 각 행렬의 역행렬을 구하여라.

$$(1) A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & : & 0 & 0 \\ 1 & 1 & : & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdot & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & : & 1 & 0 \\ 0 & 0 & : & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(2) B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & : & 1 & 1 \\ 0 & 1 & : & 1 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdot & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & : & 1 & 1 \\ 0 & 0 & : & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

예제 5.4 $A_{11}, B_{11} \in M_m$ 이고 $A_{22}, B_{22} \in M_n$ 일 때 다음을 계산하여라.

$$\begin{bmatrix} A_{11} & O \\ O & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{11} & O \\ O & B_{22} \end{bmatrix}$$

예제 5.5 $A_{11}, B_{11}, C_{11} \in M_m$ 이고 $A_{22}, B_{22}, C_{22} \in M_n$ 일 때 다음을 계산하여라.

$$\begin{bmatrix} A_{11} & O \\ O & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{11} & O \\ O & B_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{11} & O \\ O & C_{22} \end{bmatrix}$$

예제 5.6 행렬 $A \in M_{m,n}$ 에 대하여 $\begin{bmatrix} I_m & A \\ O & I_n \end{bmatrix}^k$ 을 계산하여라. ($k \in \mathbb{N}$)

1.6 행렬의 LU분해와 연립일차방정식

1. 가우스 변환(Gauss transformation)과 가우스 행렬(Gaussian matrix)

앞에서 언급한 **가우스 소거법**에서는 기본행연산을 사용하여 연립일차방정식에 대응하는 첨가행렬을 역 사다리꼴 형태의 행사다리꼴로 변환하여 해를 구하는 방법이다. 이러한 방법을 기술적으로 확대 발전시켜 시스템행렬 A 를 하부삼각행렬 L 과 상부삼각행렬 U 의 곱 $A = LU$ 로 분해한 후 이를 이용하여 연립일차방정식의 해를 구하는 방법을 생각할 수 있다.

『행사다리꼴로의 변환을 일괄적으로 처리하기 위해 다음과 같은 **가우스변환**(Gauss transformation)과 **가우스 행렬**(Gaussian matrix)을 생각하고 사용한다.』

【가우스 변환(Gauss transformation)과 가우스행렬(Gaussian matrix)】

$\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_n]^t \in \mathbb{R}^n$ 을 k 번째 성분이 $x_k \neq 0$ 인 열벡터라 하자.

$$\mathbf{e}_k = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\tau}_k = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \sigma_{k+1} \\ \vdots \\ \sigma_n \end{bmatrix}, \quad \sigma_i = \frac{x_i}{x_k}, \quad (i = k+1, k+2, \dots, n) \text{ 할 때,}$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \xrightarrow{M_k := I_n - \boldsymbol{\tau}_k \mathbf{e}_k^t} \mathbf{x}' = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \text{ 인 } M_k := I_n - \boldsymbol{\tau}_k \mathbf{e}_k^t \text{ 를 가우스 변환이라 하고,}$$

이의 행렬표현을 **가우스행렬**이라 한다. 또한 다음이 성질이 성립한다.

- (1) $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $(x_k \neq 0)$ 에 대해 $M_k \mathbf{x} = \mathbf{x}'$ 이다.
- (2) M_k 는 가역이며 그 역행렬은 $M_k^{-1} = I_n + \boldsymbol{\tau}_k \mathbf{e}_k^t$ 이다.

2. 행렬의 LU 분해를 이용한 연립방정식의 풀이

연립일차방정식 $Ax = b$ 의 해를 구하기 위해 **가우스 소거법**에 바탕을 둔 가우스 변환이나 가우스 행렬을 이용하여 시스템행렬 $A = LU$ 로 **분해**(*LU decomposition of A*)한 후 이를 이용하여 연립방정식의 해를 구하는 방법은 다음과 같다.

【LU 분해를 이용한 연립방정식 $Ax = b$ 의 풀이】

- (1) 일단계 : $A = LU$ 인 하부삼각행렬 L 과 상부삼각행렬 U 를 구한다.
- (2) 이단계 : $Ly = b$ 의 해 y 를 구한다.
- (3) 삼단계 : $Ux = y$ 의 해 x 를 구한다.

(1) **앞으로 풀기**(forward solving): $Ly = b$ 를 푼다.

$$\begin{cases} l_{11}y_1 & = b_1 \\ l_{21}y_1 + l_{22}y_2 & = b_2 \\ \dots & \dots \\ l_{n1}y_1 + l_{n2}y_2 + \dots + l_{nn}y_n & = b_n \end{cases}$$

$$\therefore y_i = \frac{1}{l_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} y_j \right), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

(2) **거꾸로 풀기**(backward solving): $U\mathbf{x} = \mathbf{y}$ 를 푼다.

$$\begin{cases} u_{11}x_1 + u_{12}x_2 + \dots & + u_{1n}x_n = y_1 \\ \dots & \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ & u_{n-1}x_{n-1} + u_{nn}x_n = y_{n-1} \\ & & u_{nn}x_n = y_n \end{cases}$$

$$\therefore x_i = \frac{1}{u_{ii}} \left(y_i - \sum_{j=i+1}^n u_{ij} x_j \right), \quad i = n, n-1, \dots, 1$$

개념 및 내용

예제 6.1 다음 행렬 A 의 LU 분해를 구하여라.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \\ 5 & 6 & 4 \end{bmatrix}$$

예제 6.2 행렬의 LU 분해를 이용하여 다음 연립방정식의 해를 구하여라.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \\ 5 & 6 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

예제 6.3 시스템행렬의 LU 분해를 이용하여 다음 연립방정식의 해를 구하여라.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 7 \end{bmatrix}$$

PART

+

-

×

÷

02

행렬식 (Determinant)

2.1 행렬식(Determinant)

2.2 행렬식의 성질(Properties of Determinant)

2.3 수반행렬(Adjoint matrix)

2.4 크래머의 공식(Cramer's Rule)

2.1 행렬식(Determinant)

1. 행렬식의 정의

행렬 $A := [a_{ij}] \in M_n$ 의 **행렬식**(determinant)은 어떤 규칙에 따라 행렬 A 에 수(스칼라)를 대응시킨 것이며, 다음과 같이 표현한다.

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

행렬식(determinant)을 정의하는 방법은 통상

- (1) **치환(permutation)에 의한 방법.**
- (2) **행렬식이 다변수 선형함수라는 사실을 이용한 방법.**
- (3) **여인수 전개(cofactor expansion)를 이용하는 방법**

이 있다. 어떤 방법을 가지고 행렬식을 정의하더라도 행렬식에 대한 결과는 변함이 없다.

2. 행렬식의 여인수 전개(Cofactor expansion of determinant)

행렬식은 어떤 방법을 가지고 정의하더라도 그 결과는 변함이 없다. 여기서는 특별히 계산을 편리하게 하고 보다 쉽게 행렬식의 본질에 다가가기 위해 여인수 전개를 사용하여 행렬식을 정의하고, 이에 따라 행렬식의 여러 성질을 유도할 수 있다.

여인수(cofactor)를 이용해서 행렬식을 정의하는 방법은 단계적으로 행렬의 크기를 낮추어 전개하는 방법에 의존한다. 예를 들면 n 차 정방행렬의 행렬식을 $(n-1)$ 차 행렬의 행렬식을 이용해서 전개하는 방식이다.

n 차 정방행렬 $A := [a_{ij}] \in M_n$ 에 대해서 다음과 같이 행렬식을 정의한다.

- (1) ij -**소행렬**(minor matrix) $M_{ij} \Leftrightarrow A$ 에서 i 행과 j 열을 제거해서 얻어지는 부분행렬.

- (2) A 의 ij -**여인수**(cofactor) $A_{ij} := (-1)^{i+j} \det(M_{ij}) = (-1)^{i+j} |M_{ij}|$

- (3) **행렬식의 여인수 전개** 또는 **라플라스 전개**(Laplace expansion)

$$\begin{aligned} \det(A) = |A| &:= \sum_{k=1}^n a_{ik} A_{ik} \quad (\leftarrow i\text{행 전개}) \\ &= \sum_{k=1}^n a_{kj} A_{kj} \quad (\leftarrow j\text{열 전개}) \end{aligned}$$

3. 3×3 이하의 행렬의 행렬식

$$(1) A = [a_{11}] \Rightarrow \det(A) = |A| = |a_{11}| = a_{11}$$

$$(2) A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \Rightarrow \det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} := a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$(3) A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \Rightarrow \det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$:= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

개념 및 내용

예제 1.1 다음 두 행렬의 행렬식을 구하여라.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$$

예제 1.2 행렬 $A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -4 \\ 1 & -4 & 3 \\ 5 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ 에 대해서 소행렬 M_{12} , M_{22} , M_{32} 와 대응하는 여인수 A_{12} , A_{22} , A_{32} 를 구하여라.

예제 1.3 행렬 $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 5 & 4 \end{bmatrix}$ 에 대한 행렬식 $\det(A)$ 를 구하여라.

예제 1.4 다음 행렬 A 의 행렬식은?(홍익대 2006)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

① 1

② 2

③ 3

④ 4

예제 1.5 다음 행렬의 행렬식은?(아주대 2008)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

- ① 3 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

예제 1.6 행렬 $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ 의 행렬식을 구하십시오. (단국대 2013)

2.2 행렬식의 성질(Properties of determinant)

1. 행렬식의 성질1

$$(1) U = [u_{ij}] \in M_n : \text{상부삼각행렬} \Rightarrow \det(U) = u_{11}u_{22} \cdots u_{nn}.$$

$$(2) L = [l_{ij}] \in M_n : \text{하부삼각행렬} \Rightarrow \det(L) = l_{11}l_{22} \cdots l_{nn}.$$

$$(3) I_n = [\delta_{ij}] \in M_n : \text{단위행렬} \Rightarrow \det(I_n) = 1.$$

$$(4) A = [a_{ij}] \in M_n \text{ \& } A_{(i)} = \vec{0} \text{ 또는 } A^{(j)} = \vec{0} \Rightarrow \det(A) = 0.$$

$$(5) A, B \in M_n \Rightarrow \det(A+B) \neq \det(A) + \det(B).$$

2. 기본행연산과 행렬식(Elementary row operations & determinant)

$$(1) A \in M_n \text{ \& } B \text{가 } A \text{의 두 행(또는 열)을 교환하여 얻어진 행렬}$$

$$\Rightarrow \det(B) = -\det(A).$$

$$(2) A \in M_n \text{ \& } B \text{가 } A \text{의 한 행(또는 열)에 상수 } k \text{를 곱해서 얻어진 행렬}$$

$$\Rightarrow \det(B) = k\det(A).$$

$$(3) A \in M_n \text{ \& } k \text{는 상수} \Rightarrow \det(kA) = k^n \det(A).$$

$$(4) A, B, C \in M_n \text{ \& } A_{(i)} = B_{(i)} + C_{(i)} \text{ \& } A_{(k)} = B_{(k)} = C_{(k)}, k \neq i$$

$$\Rightarrow \det(A) = \det(B) + \det(C)$$

$$(5) A, B, C \in M_n \text{ \& } A^{(j)} = B^{(j)} + C^{(j)} \text{ \& } A^{(k)} = B^{(k)} = C^{(k)}, k \neq j$$

$$\Rightarrow \det(A) = \det(B) + \det(C)$$

$$(6) A \in M_n \text{ \& } A \xrightarrow{R_i + kR_j \rightarrow R_i} B \Rightarrow \det(B) = \det(A).$$

(행렬 A 의 한 행에 다른 행의 상수 배를 더하여도 행렬식은 변함이 없다. 또한, 행렬 $A \in M_n$ 의 한 열에 다른 열의 상수 배를 더하여도 행렬식은 변함이 없다.)

$$(7) A \in M_n \text{ \& } A_{(i)} = kA_{(l)}, i \neq l \text{ 또는 } A^{(j)} = kA^{(l)}, j \neq l \Rightarrow \det(A) = 0.$$

3. 기본행렬과 행렬식(Elementary matrices & determinant)

$E \in M_n$ 는 기본행렬(elementary matrices)이고 $A \in M_n$ 일 때 다음이 성립한다.

$$(1) E = E_{(i), (j)} \Rightarrow \det(E) = \det(E_{(i), (j)}) = -1.$$

$$(2) E = E_{k(i)} \Rightarrow \det(E) = \det(E_{k(i)}) = k.$$

$$(3) E = E_{(i) + k(j)} \Rightarrow \det(E) = \det(E_{(i) + k(j)}) = 1.$$

$$(4) \det(EA) = \det(E)\det(A).$$

4. 역행렬과 행렬식(Inverse matrix & determinant)

$$(1) A \in M_n : \text{특이행렬(singular matrix)} \Leftrightarrow \det(A) = 0.$$

$$(2) A, B \in M_n \Rightarrow \det(AB) = \det(A)\det(B).$$

$$(3) A \in M_n : \text{가역행렬(invertible matrix)} \Leftrightarrow \det(A) \neq 0 \ \& \ \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}.$$

$$(4) A \in M_n \Rightarrow \det(A^t) = \det(A)$$

$$(5) A \in M_n : \text{반대칭행렬(skew symmetric matrix)} \Rightarrow [1 + (-1)^{n+1}]\det(A) = 0.$$

$$(6) \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \ \& \ A = I_n + \mathbf{x}\mathbf{y}^t \Rightarrow \det(A) = 1 + \mathbf{x}\mathbf{y}^t$$

5. LU 분해와 행렬식(Inverse matrix & determinant)

행렬 $A \in M_n$ 가 단위 하부삼각행렬 L 과 상부삼각행렬 U 로 분해될 때 다음이 성립한다.

$$\det(A) = \det(LU) = \det(L)\det(U) = \det(U)$$

6. 블록행렬과 행렬식(Block matrix & determinant)

(1) A 와 B 가 정방행렬일 때 블록행렬의 행렬식에 대해 다음이 성립한다.

$$\begin{vmatrix} A & C \\ \cdots & \cdots \\ O & B \end{vmatrix} = |A| |B|$$

(2) $A, B, C, D \in M_n$ 와 블록행렬 $\Gamma = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ 에 대해 다음이 성립한다.

① A : 정칙행렬 $\Rightarrow \det(\Gamma) = \det(A)\det(D - CA^{-1}B).$

② D : 정칙행렬 $\Rightarrow \det(\Gamma) = \det(D)\det(A - BD^{-1}C).$

개념 및 내용

예제 2.1 행렬 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ 의 행렬식 $\det(A) = -10$ 이다. 이를 이용하여 직접 계산없이 다음 각 행렬의 행렬식을 구하여라.

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

예제 2.2 행렬 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ 의 행렬식 $\det(A) = -10$ 이다. 이를 이용하여 직접 계산없이 행렬

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 8 & 6 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix} \text{의 행렬식을 구하여라.}$$

예제 2.3 행렬 $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 7 & 8 \end{bmatrix}$ 와 $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 7 & 8 \end{bmatrix}$ 의 행렬식이 각각 $|B| = 22$, $|C| = 29$ 라는 사실을 이용해서

직접 계산 없이 행렬 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \\ 2 & 7 & 8 \end{bmatrix}$ 의 행렬식을 구하여라.

예제 2.4 행렬의 삼각화를 이용하여 다음 행렬의 행렬식을 구하여라.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \\ -3 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

예제 2.5 다음과 같은 「반데몽드 행렬식」(Vandemonde determinant)을 계산하여라.

$$(1) \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{vmatrix} = (x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_3 - x_1)$$

$$(2) \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$$

예제 2.6 A 와 B 를 각각 $\det(A) = -2$, $\det(B) = 5$ 인 4차 정방행렬이라 할 때, 다음을 구하여라.

- | | | |
|---------------------|-------------------|---------------------|
| (1) $\det(AB)$ | (2) $\det(BA)$ | (3) $\det(B^2A)$ |
| (4) $\det(A^{-1}B)$ | (5) $\det(ABA)$ | (6) $\det(3A^3)$ |
| (7) $\det(3A^{-1})$ | (8) $ (3A)^{-1} $ | (9) $ (A^tB)^{-1} $ |

예제 2.7 P 를 $n \times n$ 정칙행렬이라 하자. $P^{-1}AP = B$ 인 정방행렬 A 와 B 에 대해 $\det(A) = \det(B)$ 임을 보여라.

예제 2.8 다음 행렬의 행렬식은?(한양대 2011)

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 & 1 \\ 6 & 5 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

① 12

② 14

③ 15

④ 17

예제 2.9 행렬식 $|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$ 의 값은?(한양대 2003)

① 0

② 120

③ 144

④ 240

예제 2.10 $n \times n$ 행렬 A, B 에 대해 보기 중 옳은 것을 모두 고른 것은? (단, I 는 $n \times n$ 단위행렬, O 는 $n \times n$ 영행렬이다.) (한양대 2011)

- (가) $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$
 (나) $A^2 = A$ 이면 $A = O$ 또는 $A = I$ 이다.
 (다) $A^2 + 2A + I = O$ 이면 $A^{-1} = -A - 2I$ 이다.
 (라) A 와 B 가 대칭행렬이면 $A + B$ 도 대칭행렬이다.

① 가, 나

② 나, 다

③ 가, 라

④ 다, 라

예제 2.11 행렬 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 의 행렬식이 12 일 때 다음 설명 중 옳은 것을 모두 고르면? (여기서 a, b, c, d 는 모두 실수이다.) (광운대 2011)

- ① 행렬 A^2 의 행렬식은 144 이다.
 ② 행렬 $B = \begin{bmatrix} 2a & b-5a \\ 2c & d-5c \end{bmatrix}$ 의 행렬식은 24 이다.
 ③ 행렬 $C = \begin{bmatrix} 3a & -b \\ 3c & -d \end{bmatrix}$ 의 행렬식은 -36 이다.

① a

② b

③ a, b

④ a, c

⑤ a, b, c

예제 2.12 $\det \begin{bmatrix} a & 2a & 3a \\ b & 1+2b & 3+3b \\ c & 2+2c & 5+3c \end{bmatrix}$ 의 값은? (중앙대 공대 2012)

① $-a$ ② a ③ $6abc$

④ 0

예제 2.13 행렬식 $\det \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = -6$ 일 때, 다음 식의 값은? (한양대 2007)

$$\det \begin{bmatrix} 3a & 3b & 3c \\ -d & -e & -f \\ 4g & 4h & 4i \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} -3a & -3b & -3c \\ d & e & f \\ g-d & h-c & i-f \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} a+g & b+h & c+i \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

① 84

② 88

③ 90

④ 96

예제 2.14 A 는 $n \times n$ 행렬이다. A^t 는 A 의 전치행렬, A^{-1} 은 A 의 역행렬, $|A|$ 는 A 의 행렬식을 나타낸다. 다음 중 옳지 않은 것은?(서울과학기술대 2013)

- ① $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$ ② $|AA| = |A|$ ③ $|AA^{-1}| = 1$ ④ $|A^t| = |A|$

예제 2.15 A 와 B 는 3×3 행렬이며 다음과 같이 주어졌다.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \\ -7 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

행렬 $C = AB$ 라고 할 때 C 의 역행렬의 행렬식, 즉 $\det(C^{-1})$ 은 얼마인가?(동덕여대 2012)

- ① $\frac{1}{12}$ ② $\frac{1}{6}$ ③ 1 ④ 4

예제 2.16 행렬 A 와 B 가 다음과 같이 주어졌을 때 $\det(B^{-1}A^{-1})$ 의 값은?(단, $\det(B^{-1}A^{-1})$ 는 행렬 $B^{-1}A^{-1}$ 의 행렬식이고, A^{-1} , B^{-1} 은 각각 A , B 의 역행렬을 의미한다.)(한국항공대 2013)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 4 & 6 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- ① $\frac{1}{24}$ ② $\frac{1}{36}$ ③ $\frac{1}{48}$ ④ $\frac{1}{52}$

예제 2.17 복소수 성분을 갖는 4×4 행렬 A 가 $\det(A) = 3$ 일 때, $\det((-2A^t)^{-1})$ 의 값을 구하면?(단, 임의의 행렬 M 에 대하여 M^t 는 M 의 전치행렬을 나타낸다.)(중앙대 2009)

① $-\frac{1}{6}$

② $-\frac{1}{48}$

③ $\frac{1}{48}$

④ $\frac{1}{6}$

예제 2.18 3차 정사각형 행렬 $\begin{bmatrix} k-1 & 0 & 6 \\ 0 & k+1 & 2 \\ 1 & 0 & k \end{bmatrix}$ 의 역행렬이 존재하지 않도록 하는 모든 실수 k 값의 합을 구하시오.(단국대 2012)

예제 2.19 정방행렬 $A, B \in M_n$ 이 가역이고, I_n 은 단위행렬일 때, 다음 중 성립하지 않는 것은?

① $(I_n + AB)^{-1}A = A(I_n + BA)^{-1}$

② $A^{-1} + B^{-1} = A^{-1}(A + B)B^{-1}$

③ $(A^{-1} + B^{-1})^{-1} = B(A + B)^{-1}A$

④ $(I_n + A^{-1})^{-1} = (A + I_n)^{-1}A^{-1}$

2.3 수반행렬(Adjoint matrix)

1. 수반행렬(adjoint matrix)의 정의

행렬 $A = [a_{ij}] \in M_n$ 에 대해서 A 의 여인수(cofactor)로 이루어진 행렬을 A 의 수반행렬(adjoint matrix)을 $adj(A)$ 로 표현하고, 다음과 같이 정의한다.

$$adj(A) := \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

[참고] $A_{ij} = A$ 의 ij -여인수(cofactor)이다.

2. 수반행렬의 성질(Properties of adjoint matrix)

$A, B \in M_n$ & $k \in \mathbb{R}$ 일 때 다음이 성립한다.

$$(1) \sum_{l=1}^n a_{il} A_{kl} = \delta_{ik} \det(A) \Leftrightarrow A(adj(A)) = \det(A)I_n \quad (\leftarrow i\text{-행 전개})$$

$$(2) \sum_{l=1}^n a_{lj} A_{lk} = \delta_{jk} \det(A) \Leftrightarrow (adj(A))A = \det(A)I_n \quad (\leftarrow j\text{-열 전개})$$

$$(3) adj(AB) = (adj(B))(adj(A)) \text{ \& } adj(A^m) = [adj(A)]^m \quad (m \in \mathbb{N})$$

$$(4) A : \text{대칭행렬} \Rightarrow adj(A) : \text{대칭행렬}.$$

$$(5) adj(kA) = k^{n-1}adj(A).$$

$$(6) adj(A^{-1}) = (adj(A))^{-1} = \frac{1}{\det(A)}A$$

$$(7) |adj(A)| = |A|^{n-1}.$$

$$(8) adj(adj(A)) = |A|^{n-2}A.$$

$$(9) A : \text{정칙행렬} \Leftrightarrow adj(A) : \text{정칙행렬} \text{ \& } A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}adj(A).$$

개념 및 내용

예제 3.1 $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ 에 대해 $\det(A)$, $\text{adj}(A)$ 와 A^{-1} 을 구하여라.

예제 3.2 3×3 행렬 A 의 수반행렬이 다음과 같이 주어져 있다.

$$\text{adj}(A) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

- (1) 수반행렬의 행렬식 $|\text{adj}(A)|$ 를 구하여라.
- (2) 행렬 A 를 구하여라.
- (3) 직접계산에 의해 $|\text{adj}(A)| = |A|^2$ 이 성립함을 보여라.

예제 3.3 행렬 $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ 이고 $\text{adj}(A)$ 가 A 의 수반행렬(adjoint matrix)을 의미할 때, 행렬식

$\det(\text{adj}(A))$ 의 값은?(한국항공대 2012)

- ① 2 ② 4 ③ -2 ④ -4

예제 3.4 다음 행렬 $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ 의 수반행렬(adjoint matrix) $\text{adj}(A)$ 의 행렬식 값은?(한양대 2012)

- ① 30 ② 30^2 ③ 30^3 ④ 30^4

예제 3.5 $\text{adj}(A)$ 가 A 의 수반행렬이다. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ 일 때, 행렬식 $|\text{adj}(A^2)|$ 의 값은?(국민대 2011)

- ① 4 ② 8 ③ 12 ④ 16

예제 3.6 행렬 $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ 의 역행렬이 $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ 일 때, $\sum_{i=1}^3 \left(\sum_{j=1}^3 a_{ij} \right)$ 의 값은?(한양대 2011)

- ① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3

예제 3.7 행렬 $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ 의 역행렬 A^{-1} 의 3 행의 원소들의 합을 구하시오.(동덕여대 2013)

- ① 1 ② -1 ③ 2 ④ -23

2.4 크래머의 공식(Cramer's rule)

1. 【크래머의 공식: Cramer's rule】

$A = [A^{(1)} \ A^{(2)} \ \cdots \ A^{(n)}] \in M_n$ 가 정칙이고 $\mathbf{b} \in M_{n,1}$ 열벡터라 하자. 여기서 $A^{(j)}$ 는 A 의 j 열벡터를 나타낸다. 그러면 연립방정식 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 의 해(solution)는 다음과 같이 주어진다.

$$x_j = \frac{\det([A^{(1)} \ \cdots \ A^{(j-1)} \ \mathbf{b} \ A^{(j+1)} \ \cdots \ A^{(n)}])}{\det(A)}$$

(단, $j = 1, 2, \dots, n$)

개념 및 내용

예제 4.1 크래머의 공식(Cramer's rule)을 사용하여 다음 연립일차방정식의 해를 구하여라.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0 \\ 4x_1 - 3x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$$

예제 4.2 아래 일차 연립방정식의 해 중 x_4 의 값을 구하라. (중양대 2005)

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 8 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 3 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = -1 \end{cases}$$

① 1

② 3

③ 6

④ 무수히 많다

예제 4.3 다음 연립방정식을 만족하는 x_1 의 값은? (중양대 공대 2013)

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - x_3 - 3x_4 = -13 \\ -3x_1 - x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 14 \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 6 \\ -4x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = -9 \end{cases}$$

① -1

② 0

③ 1

④ 2

예제 4.4 크래머의 공식(Cramer's rule)을 사용하여 다음 주어진 연립일차방정식의 해를 구하여라.

$$(1) \begin{cases} x_1 & + 2x_3 = -1 \\ & x_2 + x_3 = 2 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 4 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ & x_2 + x_3 = 2 \\ & x_3 = 3 \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} x_1 & = 1 \\ x_1 + 2x_2 & = 2 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 & = 3 \end{cases}$$

PART

+

-

×

÷

03

벡터공간 (Vector space)

3.1 벡터와 벡터공간(Vectors & Vector Spaces)

3.2 기저와 차원(Basis and Dimension)

3.3 행공간과 열공간(Row space & Column space)

3.1 벡터와 벡터공간(Vector and Vector space)

1. 벡터와 벡터공간(Vector and Vector space)

$\mathbb{R}^n$ 의 경우를 확장하여 일반적으로 어떤 집합 V 에 기본연산인 **합(sum)**과 **스칼라곱(scalar multiplication)**을 정의하고 다음과 같은 공리(axiom) 또는 성질을 만족하면 $(V, +, \cdot)$ 를 **벡터공간**(Vector space)이라고 한다.

임의의 벡터 $u, v, w \in V$ & $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ 일 때, 다음이 성립한다.

(1) 기본연산에 대한 닫힘성

$$\textcircled{1} u + v \in V$$

[덧셈의 닫힘성]

$$\textcircled{2} \alpha \cdot u \in V$$

[스칼라곱의 닫힘성]

(2) 가법성질

$$\textcircled{1} u + v = v + u$$

[교환법칙]

$$\textcircled{2} u + (v + w) = (u + v) + w$$

[결합법칙]

$$\textcircled{3} \exists \vec{0} \in V \text{ s.t. } u + \vec{0} = \vec{0} = \vec{0} + u$$

[덧셈의 항등원]

$$\textcircled{4} \forall u, \exists (-1)u \in V \text{ s.t. } u + (-1)u = \vec{0}$$

[역원]

(3) 스칼라곱 성질

$$\textcircled{1} \alpha(\beta u) = (\alpha\beta)u = \beta(\alpha u)$$

$$\textcircled{2} \alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$$

[분배법칙]

$$\textcircled{3} (\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$$

[분배법칙]

$$\textcircled{4} 1u = u$$

[참고] ① 스칼라가 실수일 때는 **실벡터공간**(real vector space)이고 복소수일 때는 **복소벡터공간**(complex vector space)이라 한다.

② 벡터공간 $(V, +, \cdot)$ 를 줄여서 V 로 나타낸다.

③ 벡터공간의 원소를 **벡터**(vector)라고 한다.

④ $(-1)u := -u$ 로 쓴다. 따라서, $u + (-1)v = u - v$ 로 쓴다.

⑤ $\vec{0}$ 은 **영벡터**(zero vector)라 하고, 덧셈에 대한 항등원이다.

2. 벡터공간의 기본성질

V 는 벡터공간, $u \in V$ & $\alpha \in \mathbb{R}$ 일 때 다음이 성립한다.

$$(1) 0u = \vec{0}$$

$$(2) \alpha \vec{0} = \vec{0}$$

$$(3) \alpha u = \vec{0} \Rightarrow \alpha = 0, \text{ 또는 } u = \vec{0}$$

3. 기본적인 벡터공간의 몇 가지 예

(1) $(\mathbb{R}^n, +, \cdot) & \mathbb{R}^n := \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, n\}$

(i) 합 또는 덧셈(sum):

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) := (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$$

(ii) 스칼라 곱(scalar multiplication):

$$\alpha \cdot (x_1, x_2, \dots, x_n) := (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n)$$

(2) $(M_{m,n}, +, \cdot) & M_{m,n} := \{A = [a_{ij}] \mid a_{ij} \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$

(i) 합 또는 덧셈(sum):

$$A + B = [a_{ij}] + [b_{ij}] := [a_{ij} + b_{ij}]$$

(ii) 스칼라 곱(scalar multiplication):

$$\alpha \cdot A = \alpha \cdot [a_{ij}] := [\alpha a_{ij}]$$

(3) $(P_n, +, \cdot) & P_n := \left\{ p(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k \mid a_k \in \mathbb{R}, k = 0, 1, 2, \dots, n \right\}$

(i) 합 또는 덧셈(sum):

$$p(x) + q(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k + \sum_{k=0}^n b_k x^k := \sum_{k=0}^n (a_k + b_k) x^k$$

(ii) 스칼라 곱(scalar multiplication):

$$\alpha \cdot p(x) = \alpha \cdot \sum_{k=0}^n a_k x^k := \sum_{k=0}^n \alpha a_k x^k$$

(4) $(F, +, \cdot) & F := \{f(x) \mid f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$

(i) 합 또는 덧셈(sum):

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x)$$

(ii) 스칼라 곱(scalar multiplication):

$$(\alpha \cdot f)(x) := \alpha f(x)$$

(5) $(C([a, b]), +, \cdot) & C([a, b]) := \{f \mid f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} : \text{연속}\}$

(i) 합 또는 덧셈(sum):

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x)$$

(ii) 스칼라 곱(scalar multiplication):

$$(\alpha \cdot f)(x) := \alpha f(x)$$

4. 부분공간(Subspace)

(1) 정의

$(V, +, \cdot) = V$ 가 벡터공간이라 하자. V 의 부분집합 W 가 다시 벡터공간이 될 때 W 를 벡터공간 V 의 **부분공간**(subspace)이라고 하고 $W < V$ 로 나타낸다.

(2) [부분공간의 유용한 판정법]

$(V, +, \cdot)$ 는 벡터공간 & $W \subset V$ 일 때 다음이 성립한다.

$$W < V \Leftrightarrow \begin{cases} (i) \mathbf{u}, \mathbf{v} \in W \Rightarrow \mathbf{u} + \mathbf{v} \in W & [\text{덧셈의 닫힘성}] \\ (ii) \mathbf{u} \in W, \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha \cdot \mathbf{u} \in W & [\text{스칼라곱의 닫힘성}] \end{cases}$$

5. 기본적인 부분공간의 몇 가지 예

(1) $(V, +, \cdot) = V$ 가 벡터공간일 때 $\{\vec{0}\}$ 와 V 는 언제나 V 의 부분공간이 된다.

(2) $(\mathbb{R}^2, +, \cdot) = \mathbb{R}^2$ 의 부분공간

- ① $\{(0, 0)\}$: 영공간
- ② 원점을 지나는 직선
- ③ $\mathbb{R}^2$

(3) $(\mathbb{R}^3, +, \cdot) = \mathbb{R}^3$ 의 부분공간

- ① $\{(0, 0, 0)\}$: 영공간
- ② 원점을 지나는 직선
- ③ 원점을 지나는 평면
- ④ $\mathbb{R}^3$

(4) $(\mathbb{R}^n, +, \cdot) = \mathbb{R}^n$ 의 부분공간

- ① $\{(0, 0, \dots, 0)\}$: 영공간
- ② $S := \{(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, 0) \mid x_i \in \mathbb{R}\} < \mathbb{R}^n$
- ③ $\mathbb{R}^n$

(5) $(F, +, \cdot) & F := \{f(x) \mid f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$ 의 부분공간

- ① $P_n := \left\{ p(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k \mid a_k \in \mathbb{R}, k = 1, 2, \dots, n \right\} < F$
- ② $C([a, b]) := \{f \mid f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} : \text{연속}\} < F$

(6) $(M_n, +, \cdot) & M_n := \{A = [a_{ij}] \mid a_{ij} \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n\}$ 의 부분공간

- ① $\{A = [a_{ij}] \in M_n \mid A^t = A\} < M_n$
- ② $\{A = [a_{ij}] \in M_n \mid A^t = -A\} < M_n$

6. 영공간(Null space) 또는 핵(kernel)

(1) 정의

$A = [a_{ij}] \in M_{m,n}$ 일 때 행렬 A 의 **영공간**(Null space), 또는 **핵**(kernel)을 다음과 같이 정의한다.

$$N(A) = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\mathbf{x} = \vec{0} \}$$

(2) 영공간의 특징

(1) $N(A) = \ker(A)$

(2) $N(A)$ 는 제차방정식 $A\mathbf{x} = \vec{0}$ 의 해집합이다.

(3) $N(A) < \mathbb{R}^n$

7. 일차결합(Linear combination)과 생성(Span)

(1) 정의

$(V, +, \cdot) = V$ 가 벡터공간이고 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m$ 는 벡터공간 V 의 벡터, $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $(i = 1, 2, \dots, m)$ 는 스칼라일 때, $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m\}$ 의 **일차결합**(linear combination)을

$$\sum_{k=1}^m \alpha_k \mathbf{v}_k = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \dots + \alpha_m \mathbf{v}_m$$

로 정의한다. 또한, 일차결합의 집합은

$$Sp\langle \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m\} \rangle := \left\{ \sum_{k=1}^m \alpha_k \mathbf{v}_k \mid \alpha_k \in \mathbb{R}, 1 \leq k \leq m \right\}$$

으로 표현하고 정의한다.

[참고] ① 일차결합은 **선형결합**이라고도 한다.

② $Sp\langle \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m\} \rangle$ 는 $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m\}$ 에 의해 **생성된 부분공간**(subspace spanned by S)이라고 한다.

③ $Sp\langle \{ \} \rangle := \{ \vec{0} \}$ 으로 정의한다.

④ $V = Sp\langle S \rangle$ 일 때, S 를 V 의 **생성집합**(spanning set)이라고 한다.

(2) 생성집합의 특징

V 는 벡터공간 & $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m \in V$ 일 때 다음이 성립한다.

(1) $Sp\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m \rangle < V$

(2) $Sp\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m \rangle$ 는 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m$ 을 품는 V 의 최소 부분공간이다.

예제 1.1 행렬 $A = [a_{ij}] \in M_{m,n}$ 의 영공간 $N(A) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\mathbf{x} = \vec{0}\}$ 가 $\mathbb{R}^n$ 의 부분공간임을 보여라.

예제 1.2 V 를 모든 실함수의 집합이라 할 때 $W = \{f \in V \mid f(3) = 1 + f(2)\}$ 라고 하면 W 가 V 의 부분공간인지를 조사하여라.

예제 1.3 V 는 벡터공간 & $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m \in V$ 일 때 다음이 성립함을 보여라.

- (1) $Sp\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m \rangle \subset V$
- (2) $Sp\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m \rangle$ 는 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m$ 을 품는 V 의 최소 부분공간이다.

예제 1.4 $V = \mathbb{R}^+$ 를 모든 양의 실수의 집합이라 하자. V 에 다음과 같이 덧셈과 스칼라 곱을 정의한다면 V 는 벡터공간이 됨을 보여라.

$$x + y = xy, \quad kx = x^k$$

예제 1.5 행렬 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & -1 \end{bmatrix}$ 의 영공간 $N(A)$ 를 구하여라.

예제 1.6 주어진 벡터에 대해서 가능하다면 w 를 u 와 v 의 일차결합으로 나타내어라.

- (1) $u = (2, -1)$, $v = (1, 2)$, $w = (4, 5)$
- (2) $u = (1, -1)$, $v = (-1, 1)$, $w = (1, 1)$
- (3) $u = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$, $v = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $w = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$

예제 1.7 주어진 벡터에 대해서 가능하다면 w 를 u_1, u_2, u_3 의 일차결합으로 나타내어라.

(1) $u_1 = (1, 1, 1), u_2 = (1, 2, 3), u_3 = (2, -1, 1) \quad w = (1, -2, 5)$

(2) $u_1 = (1, 1, 2, 2), u_2 = (-3, 1, -4, 2), u_3 = (2, 3, 5, 6) \quad w = (0, 5, 3, 0)$

(3) $u_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, u_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}, w = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$

예제 1.8 다항식 $p(x) = x^2 + 4x - 3$ 을 $p_1 = x^2 - 2x + 5, p_2 = 2x^2 - 3x, p_3 = x + 3$ 의 일차결합으로 나타내어라.

예제 1.9 집합 $\{(v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3\}$ 가 다음 조건을 만족할 때 벡터공간이 아닌 것은?(서울과학기술대 2011)

- $$\begin{array}{ll} \textcircled{1} \quad v_1 + v_2 = 0 & \textcircled{2} \quad v_1 + v_2 + v_3 = 1 \\ \textcircled{3} \quad 2v_2 = v_3, \quad v_1 + v_3 = 0 & \textcircled{4} \quad v_1 = 2v_2 = 3v_3 \end{array}$$

예제 1.10 다음에 주어진 집합 중 벡터공간이 아닌 것은?(서울과학기술대 2012)

- ① $5v_1 - 3v_2 - 2v_3 = 0$ 을 만족하는 $\mathbb{R}^3$ 내의 모든 벡터
- ② 처음 3개 성분들이 모두 0인 $\mathbb{R}^5$ 내의 모든 벡터
- ③ $v_1 + v_2 = 0$ 과 $v_3 - v_4 = 1$ 을 만족하는 $\mathbb{R}^4$ 내의 모든 벡터
- ④ 3×3 크기의 모든 대칭행렬

예제 1.11 $\mathbb{R}^3$ 에서 $\vec{0}$ 벡터가 아닌 임의의 벡터 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 가 주어질 때 다음 집합 중 항상 $\mathbb{R}^3$ 의 부분공간이 되는 것은?(중양대자연 2012)

- ① $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 를 지나는 직선 ② $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 를 지나는 평면
③ $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 에 모두 직교하는 벡터들의 집합 ④ $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid (\mathbf{a} \cdot \mathbf{x}, \mathbf{b} \cdot \mathbf{x}, \mathbf{c} \cdot \mathbf{x}) = (0, 0, -1)\}$

예제 1.12 아래 <보기>에서 벡터공간의 부분공간에 관한 기술 중 옳지 않은 것의 개수는?(한양대 2013)

가. 모든 벡터공간은 적어도 두 개의 서로 다른 부분공간을 갖는다.

나. 실공간 $\mathbb{R}^3$ 의 부분공간 W 에 벡터 $u + v$ 가 속하면, 벡터 u 와 v 도 W 에 속한다.

다. 벡터공간 V 의 두 개의 부분공간의 교집합은 공집합이 될 수도 있다.

라. 평면상의 모든 직선은 하나의 벡터에 의해 생성되는 실공간 $\mathbb{R}^2$ 의 부분공간이다.

① 1

② 2

③ 3

④ 4

3.2 기저와 차원(Basis and Dimension)

1. 일차독립과 일차종속(Linear independence and dependence)

V 는 벡터공간 & $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ 이고 $\alpha_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, n$: 스칼라(scalar) 일 때 **일차결합**(또는 **선형결합**, linear combination), **일차독립**(linearly independent) 및 **일차종속**(linearly dependent)을 다음과 같이 정의한다.

$$(1) \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n : v_1, v_2, \dots, v_n \text{의 일차결합}$$

$$(2) \{v_1, v_2, \dots, v_n\} : \text{일차독립} \Leftrightarrow \forall \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i = \vec{0} \Rightarrow \alpha_i = 0, \forall i$$

$$(3) \{v_1, v_2, \dots, v_n\} : \text{일차종속} \Leftrightarrow \forall \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i = \vec{0} \Rightarrow \exists \alpha_i \neq 0$$

[참고] 일차독립을 선형독립, 일차종속을 선형종속이라고도 한다.

2. 일차독립/일차종속과 관련된 정리

(1) $\{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ 이 일차종속일 필요충분조건은 한 벡터가 그 이전 벡터들의 일차결합으로 표현될 때이다.

(2) $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ 가 일차독립이고, $\{w_1, w_2, \dots, w_m\}$ 이 생성하는 벡터공간에 놓이면 $k \leq m$ 이다.

3. 기저(Basis)

(1) 정의

$S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ 가 벡터공간 V 의 부분집합이고 다음 조건을 만족할 때, S 를 V 의 **기저(basis)**라고 정의한다.

- | | |
|---|--------|
| (i) $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} : \text{일차독립}$ | 【독립성】 |
| (ii) $Sp\langle S \rangle = Sp\langle \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \rangle = V$ | 【생성집합】 |

[참고] ① 기저는 생성집합 중 제일 작은 집합이자, 일차독립인 집합 중 가장 큰 집합이다.

② 벡터공간의 기저는 여러 개가 있을 수 있지만, 기저의 원소의 개수는 모두 같다.

(2) 기저관련 성질

- ① 벡터공간 V 에 있는 모든 일차독립인 벡터의 집합은 V 의 기저(basis)로 확장 할 수 있다.
- ② $V = Sp\langle v_1, \dots, v_n \rangle$ & $\{v_1, \dots, v_k\}$ 가 V 의 일차독립인 최대의 부분집합
 $\Rightarrow \{v_1, \dots, v_k\}$ 는 V 의 기저(basis)이다.
- ③ V 가 벡터공간 & S_1 과 S_2 가 V 의 기저 $\Rightarrow |S_1| = |S_2|$

[참고] $|S| :=$ 집합 S 의 원소의 수

4. 차원(dimension)

(1) 정의

벡터공간 V 의 한 기저 S 의 원소의 수를 V 의 **차원(dimension)**이라고 하고 $\dim(V)$ 로 나타낸다.

(2) 유한차원과 무한차원

- ① V : 유한차원 $\Leftrightarrow \dim(V) < \infty$
- ② V : 무한차원 $\Leftrightarrow \dim(V) = \infty$
- ③ 영벡터공간 $\{\vec{0}\}$ 의 차원은 0으로 정의한다.

5. 표준기저(standard basis)

(1) $\mathbb{R}^n$ 의 표준기저: $\{e_j \in \mathbb{R}^n \mid j = 1, 2, \dots, n\} \Rightarrow \dim(\mathbb{R}^n) = n$

(2) M_2 의 표준기저: $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} \Rightarrow \dim(M_2) = 4$

(3) P_n 의 표준기저: $\{1, x, x^2, \dots, x^n\} \Rightarrow \dim(P_n) = n + 1$

6. 기저 및 차원관련 성질

(1) V 를 $\dim(V) = k$ 인 벡터공간이라고 하면 V 에 대해 다음 사실이 성립한다.

- ① V 에 있는 $k + 1$ 개 이상의 벡터는 일차종속이다.
- ② V 에 있는 k 개 미만의 벡터는 V 를 생성하지 않는다.
- ③ V 에 있는 k 개의 일차독립인 벡터는 V 의 기저를 이룬다.
- ④ V 를 생성하는 k 개의 벡터는 V 의 기저이다.

(2) n 차원 벡터공간 V 에 대해서 $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ 을 V 의 기저(basis)라고 하면 V 의 모든 원소는 V 의 일차결합으로 유일하게 표현된다. 즉, v 가 V 의 원소라면

$$v = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_n v_n$$

을 만족하는 스칼라 $c_1, c_2, \dots, c_n$ 이 유일하게 존재한다.

7. 좌표, 좌표벡터 및 좌표행렬(coordinates, coordinate vector and coordinate matrix)

벡터공간 V 의 한 기저 $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ 에 대해서 S 의 원소들의 순서를 고정한 것을 $S := [v_1, v_2, \dots, v_n]$ 으로 나타내고 이것을 **순서기저**(orded basis)라고 한다. 또한, $v \in V$ 가

$$v = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_n v_n$$

로 나타날 때 **좌표**, **좌표벡터** 및 **좌표행렬**을 다음과 같이 정의한다.

- (1) $c_1, c_2, \dots, c_n$: V 의 기저 S 에 대한 **좌표**(coordinates).
 (2) $(v)_S := (c_1, c_2, \dots, c_n)$: v 의 **좌표벡터**(coordinate vector)

(3) $[v]_S := \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$: v 의 **좌표행렬**(coordinate matrix)

개념 및 내용

예제 2.1 $\mathbb{R}^3$ 의 부분공간 $V = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \mid x_1 = -2x_3, x_2 = x_3\}$ 에 대한 기저를 구하고 차원을 결정하여라.

예제 2.2 다음 제차연립방정식의 해공간의 기저와 차원을 구하여라.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

예제 2.3 $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$ 에 대해 W 를 $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ 에 의해 생성되는 벡터공간이라고 하자. $W = \mathbb{R}^3$ 인지 검증하고 W 가 $\mathbb{R}^3$ 의 부분공간이면 W 의 기저가 되는 S 의 최소의 부분집합을 구하여라.

예제 2.4 $\mathbb{R}^3$ 의 기저 $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ 에서 $\mathbf{v}_1 = (1, 2, 1)$, $\mathbf{v}_2 = (2, 9, 0)$, $\mathbf{v}_3 = (3, 3, 4)$ 일 때 각각 다음을 구하여라.

- (1) $\mathbf{v} = (5, -1, 9)$ 의 좌표벡터와 좌표행렬
- (2) $(\mathbf{u})_S = (-1, 3, 2)$ 인 벡터 $\mathbf{u}$

예제 2.5 세 벡터 $(-1, 3, -1)$, $(2, -1, 4)$, $(1, 7, a)$ 가 일차종속이 되도록 하는 a 의 값을 구하시오.(단국대 2013)

예제 2.6 벡터 $(x, 1, 1, 1)$, $(1, x, 1, 1)$, $(1, 1, x, 1)$, $(1, 1, 1, x)$ 가 일차종속이 되는 x 중 서로 다른 값을 모두 더하면?(세종대 2013)

① -2

② -1

③ 1

④ 2

예제 2.7 $\mathbb{R}^2$ 에서 벡터 $\vec{v} = (3, 2)$ 를 기본기저 $\vec{e}_1 = (1, 0)$, $\vec{e}_2 = (0, 1)$ 로 표현하면 $3\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$ 이다. 새로운 기저 $\vec{b}_1 = (2, 1)$, $\vec{b}_2 = (1, -1)$ 을 이용하여 $\vec{v} = c_1\vec{b}_1 + c_2\vec{b}_2$ 로 표현할 때 (c_1, c_2) 를 구하시오. (홍익대 2013)

- ① $(-5, 1)$ ② $\left(\frac{5}{3}, -\frac{1}{3}\right)$ ③ $(5, -1)$ ④ $\left(\frac{5}{3}, \frac{1}{3}\right)$

예제 2.8 $\mathbb{R}^3$ 의 순서기저(ordered basis) $S = \{(1, 0, 2), (-1, 3, 1), (1, 1, 1)\}$ 에 대한 벡터 $\mathbf{v} = (0, 1, 2)$ 의 좌표행렬 $[\mathbf{v}]_S$ 를 구하면?(중앙대 2007)

- ① $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ② $\begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 2 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$ ③ $\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 2 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ ④ $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

예제 2.9 다음 벡터들이 생성하는 부분공간(subspace)의 차원은?(국민대 2009)

$$\mathbf{v}_1 = (1, 2, 1), \mathbf{v}_2 = (1, -1, 3), \mathbf{v}_3 = (1, 1, 4)$$

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4

3.3 행공간과 열공간(Row space and Column space)

1. 행공간과 열공간(Row space and Column space)

$A = [a_{ij}] \in M_{m,n}$ 에 대해서 **행공간**(Row space), **열공간**(Column space) 및 **영공간**(Null space)을 다음과 같이 정의한다.

(1) $Row(A) := Sp\langle A_{(1)}, A_{(2)}, A_{(m)} \rangle < \mathbb{R}^n$: 행렬 A 의 **행공간**

(2) $Col(A) := Sp\langle A^{(1)}, A^{(2)}, A^{(n)} \rangle < \mathbb{R}^m$: 행렬 A 의 **열공간**

(3) $N(A) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = \vec{0}\} < \mathbb{R}^n$: 행렬 A 의 **영공간**

2. 행렬의 계수(rank)와 퇴화차수(또는 영계수, nullity)

$A = [a_{ij}] \in M_{m,n}$ 에 대해서 다음을 정의한다.

(1) **행계수**(row rank) $\Leftrightarrow$ 행렬 A 의 행공간의 차원.

(2) **열계수**(column rank) $\Leftrightarrow$ 행렬 A 의 열공간의 차원.

(3) **퇴화차수**(nullity) $\Leftrightarrow$ 행렬 A 의 영공간의 차원.

[참고] ① **행계수와 열계수는 같다**. 따라서 행계수와 열계수 구분 없이 행렬 A 의 **계수**(rank)라고 하고 $rank(A)$ 로 나타낸다.

② 행렬 A 의 퇴화차수는 영계수라고도 하고 $nullity(A)$ 로 나타낸다.

3. 주요 관련 성질

(1) 행동치인 두 행렬은 같은 행공간을 갖는다.

(2) 주어진 행렬의 행계수와 열계수는 서로 일치한다. 즉, $rank(A) = rank(A^t)$.

(3) $A \in M_{m,n}$ & A : 행사다리꼴(row echelon form)

$\Rightarrow$ (i) $\{A_{(i)} \mid A_{(i)} \neq \vec{0}\}$ 는 행공간의 기저.

(ii) $\{A^{(j)} \mid A^{(j)} \text{ 행벡터의 주요성분이 1인 열벡터}\}$ 는 열공간의 기저.

(4) **【계수정리: Rank Theorem】** $A \in M_{m,n}$ 에 대하여 다음이 성립한다.

$$rank(A) + nullity(A) = n$$

(5) $m \times n$ 연립일차방정식 $Ax = b$ 의 해가 존재 $\Leftrightarrow rank(A) = rank([A : b])$

4. 가역행렬과 계수와의 관계

A 가 n 차 정방행렬일 때, 다음의 명제는 모두 동치이다.

- (1) A 가 가역행렬이다.
- (2) A^{-1} 이 존재한다.
- (3) $\det(A) \neq 0$
- (4) $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ 에 대하여, $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 의 해는 유일하다.
- (5) $A\mathbf{x} = \vec{0}$ 는 자명한 해 뿐이다.
- (6) $\{A^{(1)}, A^{(2)}, \dots, A^{(n)}\}$ 는 $\mathbb{R}^n$ 의 기저이다.
- (7) $\{A_{(1)}, A_{(2)}, \dots, A_{(n)}\}$ 는 $\mathbb{R}^n$ 의 기저이다.
- (8) $\text{rank}(A) = n$
- (9) $\text{nullity}(A) = 0$
- (10) $\text{rank}([A : \mathbf{b}]) = \text{rank}(A) = n$
- (11) A 와 I_n 은 행동치이다.

5. 계수관련 성질

(1) $A \in M_{m, n}$, $B \in M_{n, k}$ 일 때 다음이 성립한다.

- ① $\text{rank}(A) = 0 \Leftrightarrow A = O$ (영행렬)
- ② $\text{rank}(A) \leq \min\{m, n\}$
- ③ $\text{rank}(A^t A) = \text{rank}(A A^t) = \text{rank}(A) = \text{rank}(A^t)$
- ④ $\text{rank}(AB) \leq \min\{\text{rank}(A), \text{rank}(B)\}$
- ⑤ **【실베스터의 계수 부등식】**(Sylvester's rank inequality)

$$\text{rank}(A) + \text{rank}(B) - n \leq \text{rank}(AB)$$

(2) $A, B \in M_n$ 일 때 다음이 성립한다.

- ① $\text{rank}(A + B) \leq \text{rank}(A) + \text{rank}(B)$
- ② $\text{rank}(AB) \leq \min\{\text{rank}(A), \text{rank}(B)\}$
- ③ $AB = O \Rightarrow \text{rank}(A) + \text{rank}(B) \leq n$
- ④ $\text{rank}(A) = n \Leftrightarrow \text{rank}(\text{adj}(A)) = n$
- ⑤ $\text{rank}(A) = n - 1 \Leftrightarrow \text{rank}(\text{adj}(A)) = 1$

개념 및 내용

예제 3.1 행렬 $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 & -3 \\ 2 & 3 & 1 & -4 \\ 3 & 8 & -3 & -5 \end{bmatrix}$ 의 행공간, 열공간 및 영공간의 기저를 구하여라. 또한 $\text{rank}(A)$ 와 $\text{nullity}(A)$ 도 구하여라.

예제 3.2 행렬 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -3 & -3 \\ 3 & 10 & -6 & -5 \end{bmatrix}$ 에 대하여 다음을 구하여라.

- (1) 행공간의 기저
- (2) 열공간의 기저
- (3) 제차방정식 $A\mathbf{x} = \vec{0}$ 의 해공간의 기저

예제 3.3 다음 벡터 중 행렬 $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -5 \end{bmatrix}$ 의 행공간(row space)에 속하지 않는 것은?(중앙대 2007)

- ① $(1, 0, -4)$ ② $(0, 1, 3)$ ③ $(2, 1, -5)$ ④ $(1, 0, 0)$

예제 3.4 공간 $\mathbb{R}^3$ 의 모든 벡터가 주어진 세 벡터 $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ 의 일차결합으로 표현될 수 있도록 하는 a 의 값을 고르면?(국민대 2013)

$$\vec{v}_1 = (1, 2, a), \vec{v}_2 = (1, a, 2), \vec{v}_3 = (a, 1, 2)$$

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ -3

예제 3.5 행렬 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & 4 & -3 & 0 \\ -3 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ 의 열공간(column space) $C(A)$ 의 차원을 구하라.(중앙대 2005)

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4

예제 3.6 행렬 $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & 2 \\ -6 & 42 & 24 & 54 \\ 21 & -21 & 0 & -15 \end{bmatrix}$ 의 계수(rank)와 열공간의 차원은?(서울과학기술대 2013)

- ① 1, 3 ② 2, 2 ③ 3, 3 ④ 4, 3

예제 3.7 다음 행렬 A 의 퇴화차수(nullity)는?(한양대 2013)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & 1 & 0 & -6 \\ 3 & 6 & 0 & 0 & -6 \\ 1 & 5 & 3 & 5 & -5 \end{bmatrix}$$

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4

예제 3.8 행렬 $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 4 & 5 & -3 \\ 3 & -7 & 2 & 0 & 1 & 4 \\ 2 & -5 & 2 & 4 & 6 & 1 \\ 4 & -9 & 2 & -4 & -4 & 7 \end{bmatrix}$ 에 대하여, 동차 선형 방정식 $A\mathbf{x} = \vec{0}$ 의 해공간의 차원은 얼마인가?(한양대 2007)

- ① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5

예제 3.9 $W = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + 2x_3 = 0, x_2 - x_3 = 0 \right\}$ 에서 W 의 차원은?(한양대 2008)

① 0

② 1

③ 2

④ 3

예제 3.10 연립방정식 $\begin{cases} x + y + 3z + w = 0 \\ 2x + y + 5z + 4w = 0 \end{cases}$ 을 동시에 만족시키는 해 (x, y, z, w) 들로 이루어진 집합의 차원 (dimension)은?(한양대 2009)

① 0

② 1

③ 2

④ 3

예제 3.11 벡터공간 $\mathbb{R}^4$ 의 두 부분공간 V 와 W 을

$$V = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \mid b + c + d = 0\},$$

$$W = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \mid a + b = 0, c = 2d\}$$

로 정의할 때, $\dim(V) + \dim(W) + \dim(V \cap W)$ 의 값은?(한양대 2012)

① 4

② 5

③ 6

④ 7

예제 3.12 A 는 2×4 행렬이다. 다음 중 A 의 영공간(null space)의 차원이 될 수 없는 것은?(중앙대 2010)

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4

PART

+

-

×

÷

04

선형변환 (Linear transformation)

4.1 선형변환(Linear transformation)

4.2 선형변환과 행렬(Linear transformation and Matrix)

4.3 기저의 변환과 행렬의 닮음
(Change of basis and Similarity of matrix)

4.1 선형사상(Linear transformation)

1. 선형변환(Linear transformation)

(1) 개념 설명 및 정의

선형변환(linear transformation)은 벡터공간을 이해하고 벡터공간 사이의 여러 관계를 밝히는 데 중요한 역할을 한다. **선형사상**은 또한 수학의 여러 현상을 이해하고 분석하는 기준틀로서 기능하고 있다.

선형사상의 개념은 통상 함수의 개념을 따른다. $(V, +, \cdot)$ 와 $(W, +, \cdot)$ 를 벡터공간이라 하자. 함수 $T: (V, +, \cdot) \rightarrow (W, +, \cdot)$ 를 **사상(mapping)**이라 한다. 이제 **두 벡터공간 $(V, +, \cdot)$ 에서 $(W, +, \cdot)$ 로의 벡터공간의 구조를 보존하는 사상**을 **선형사상(linear mapping)**, 또는 **선형변환(linear transformation)**이라고 한다.

즉, 사상 $T: V \rightarrow W$ 가 다음 두 조건을 만족하면 T 를 V 에서 W 로의 **선형변환**이라 한다.

$$(i) \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V \Rightarrow T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v}) \quad (\text{가법보존})$$

$$(ii) \quad \forall \mathbf{u} \in V, \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow T(\alpha \mathbf{u}) = \alpha T(\mathbf{u}) \quad (\text{동차성})$$

[참고] ① $T: V \rightarrow W$ 가 다음 조건을 만족할 때 **선형변환**(또는 **선형사상**)이라 한다.

$$\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V \ \& \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \Rightarrow T(\alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{v}) = \alpha T(\mathbf{u}) + \beta T(\mathbf{v})$$

② $V = W$ 일 때, 선형변환 $T: V \rightarrow V$ 를 V 위의 **선형 연산자(linear operator)**라고 한다.

(2) 용어 및 표현

두 벡터 공간 V 에서 W 로의 (선형)사상 $T: V \rightarrow W$ 에 대해서 다음과 같은 표현 및 용어를 정의한다.

- ① $T(\mathbf{v}) : \mathbf{v} \in V$ 에 대한 **상(image)**
- ② $R(T) := \{T(\mathbf{v}) \mid \mathbf{v} \in V\} : T$ 의 **치역(공간)(range space)**
- ③ $N(T) := \{\mathbf{v} \in V \mid T(\mathbf{v}) = \vec{0}\} : T$ 의 **영공간(null space)**, 또는 **핵(kernel)**
- ④ $O: V \rightarrow W$ **영사상(zero mapping)** $\Leftrightarrow$ 모든 원소에 $\vec{0}$ 을 대응시키는 사상.
- ⑤ $id: V \rightarrow V$ **항등사상(identity mapping)** $\Leftrightarrow$ 모든 원소에 자기 자신을 대응시키는 사상.

(3) 선형사상의 종류

$T: V \rightarrow W$ 가 선형사상일 때 다음과 같이 선형사상을 구분한다.

- ① $T: V \rightarrow W$ **일대일 사상(one-to-one mapping)** $\Leftrightarrow \forall T(\mathbf{u}) = T(\mathbf{v}) \Rightarrow \mathbf{u} = \mathbf{v}$
- ② $T: V \rightarrow W$ **전사 사상(onto mapping)** $\Leftrightarrow W = R(T)$
- ③ $T: V \rightarrow W$ **전단사 사상(bijective mapping)** $\Leftrightarrow$ 전사이고 단사일 때.

[참고] 전단사 사상을 **정칙선형사상**이라고도 한다.

2. 선형사상의 기본성질

선형사상 $T: V \rightarrow W$ 에 대해 다음 사실이 성립한다.

$$(1) T(\vec{0}) = \vec{0}$$

$$(2) v_k \in V, k = 1, 2, \dots, n \Rightarrow T\left(\sum_{k=1}^n \alpha_k v_k\right) = \sum_{k=1}^n \alpha_k T(v_k)$$

$$(3) N(T) = \{v \in V \mid T(v) = \vec{0}\} < V \text{ (즉, } N(T) \text{는 } V \text{의 부분공간이다.)}$$

$$(4) R(T) = \{T(v) \mid v \in V\} < W$$

$$(5) T: \text{일대일(단사, injective)} \Leftrightarrow N(T) = \{\vec{0}\}$$

3. 선형사상의 계수(rank)와 영계수(nullity)

선형사상 $T: V \rightarrow W$ 의 계수(rank)와 영계수(nullity)를 다음과 같이 정의한다.

(1) 계수(rank)

$$rank(T) := \dim(R(T)) = R(T) \text{의 차원}$$

(2) 영계수(nullity)

$$nullity(T) := \dim(N(T)) = N(T) \text{의 차원}$$

[참고] 영계수를 퇴화차수라고도 한다.

4. 주요 관련 정리

(1) V 와 W 가 벡터공간이다. 또한, $\dim(V) = n$ 이고 $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ 을 V 의 기저(basis)라 하자.

$w_1, w_2, \dots, w_n$ 을 W 의 임의의 원소라고 할 때

$$T(v_1) = w_1, T(v_2) = w_2, \dots, T(v_n) = w_n$$

인 선형사상 $T: V \rightarrow W$ 가 유일하게 존재한다.

(2) $T: V \rightarrow W$ 가 선형사상, $\dim(V) = n$ 이고 $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ 을 V 의 기저라 할 때, 다음 사실이 성립한다.

① $R(T) = \text{Sp}\langle T(v_1), T(v_2), \dots, T(v_n) \rangle$

② T : 일대일 $\Leftrightarrow \{T(v_1), T(v_2), \dots, T(v_n)\}$: 일차독립.

③ 【계수정리: Rank Theorem】

$$\dim(N(T)) + \dim(R(T)) = \dim(V)$$

개념 및 내용

예제 1.1 사상 $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ 가

$$T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, x_2 - 2x_3)$$

로 정의되어 있을 때 T 가 선형사상(변환)인지 결정하여라.

예제 1.2 $T(x_1, x_2) = (x_1 + x_2 + 1, 2x_2)$ 로 정의된 사상 $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ 가 선형사상인지 결정하여라.

예제 1.3 $T: P_3 \rightarrow P_2$ 가 다음을 만족하는 선형사상일 때 $T(3 - 4x + x^2 - 2x^3)$ 을 구하여라.

$$T(1) = 1 + x, \quad T(x) = x - 2x^2, \quad T(x^2) = 1 + 2x, \quad T(x^3) = 1 + x^2$$

예제 1.4 사상 $T: C([a, b]) \rightarrow \mathbb{R}$ 가

$$T(f) = \int_a^b f(x) dx$$

로 정의되었을 때 T 가 선형사상인지 결정하여라.

예제 1.5 사상 $D : C^1([a, b]) \rightarrow C([a, b])$ 가

$$D(f) = f' \quad (f \text{의 미분})$$

로 정의되었을 때 D 가 선형사상인지 결정하여라.

예제 1.6 벡터 $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^2$ 는 고정된 벡터일 때, 다음과 같이 정의된 사상을 생각하자.

$$L(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \mathbf{a}$$

이러한 사상을 **이동**(translation)이라고 한다. 이동은 선형사상인지 결정하여라. 그리고 **이동**의 기하학적의미를 설명하여라.

예제 1.7 $f \in C([a, b])$ 에 대하여 $T(f) = F$ 로 정의하고, F 는 아래와 같이 주어진다.

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt \quad (a \leq x \leq b)$$

사상 T 가 $C([a, b])$ 위에서 **선형 연산자**(linear operator)임을 보이고, $T(e^x)$ 와 $T(x^2)$ 을 구하여라.

예제 1.8 T 가 벡터공간 V 위에서 **선형 연산자**(Linear operator)라고 하자. 각각의 $n \geq 1$ 에 대하여 T_n 을 다음과 같이 반복적으로 정의하자.

$$T_1(\mathbf{v}) = T(\mathbf{v}), \quad T_{n+1}(\mathbf{v}) = T(T_n(\mathbf{v})) \quad \forall \mathbf{v} \in V$$

그러면 각각의 $n \geq 1$ 에 대하여 T_n 은 V 위에서 선형 연산자임을 보여라.

예제 1.9 $L_1 : U \rightarrow V$ 와 $L_2 : V \rightarrow W$ 가 선형변환이라 하고, 사상 $L := L_2 \circ L_1$ 이 각각의 $\mathbf{u} \in U$ 에 대하여 다음과 같이 정의되었다.

$$L(\mathbf{u}) = L_2(L_1(\mathbf{u}))$$

$L : U \rightarrow W$ 가 선형변환임을 보여라. 이러한 변환을 **합성변환**이라 한다.

예제 1.10 $\mathbb{R}^3$ 위에서 정의된 다음 각각의 선형 연산자의 **핵**(kernel)과 **치역**(range)을 구하여라.

- (1) $T(\mathbf{x}) = (x_3, x_2, x_1)$ (2) $T(\mathbf{x}) = (x_1, x_2, 0)$ (3) $T(\mathbf{x}) = (x_1, x_1, x_1)$

예제 1.11 $T: V \rightarrow W$ 가 선형변환이고 S 는 W 의 부분공간이라 하자. S 의 **역상**(inverse image) $T^{-1}(S)$ 는 다음과 같이 정의된다.

$$T^{-1}(S) := \{v \in V \mid T(v) \in S\}$$

$T^{-1}(S)$ 가 V 의 부분공간임을 보여라.

예제 1.12 $A = [a_{ij}] \in M_{m,n}$ 이고 $T_A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ 를 아래와 같이 정의할 때 다음을 보여라.

$$T_A(x) = Ax$$

- (1) T_A 가 선형변환임을 보여라.
- (2) T_A 는 $\mathbb{R}^n$ 에서 행렬 A 의 열공간 위로 가는 사상(함수)이다.

예제 1.13 2차 다항식의 벡터공간을 P_2 라 할 때 $T: P_2 \rightarrow \mathbb{R}$ 이 $T(p(x)) = p(2)$ 로 정의되어 있다. $N(T)$ 의 기저와 T 의 계수 $rank(T)$ 를 구하여라.

예제 1.14 선형변환 $L: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ 이 $L(4, 3) = (1, 2, 5)$, $L(6, 1) = (3, 6, 1)$ 일 때, $L(5, 2)$ 의 각 성분의 합은?(한성대 2013)

- ① 6 ② 8 ③ 9 ④ 11

예제 1.15 선형변환 $L: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ 이 $L(2, -7) = (1, 1, 1)$, $L(-5, 1) = (-1, 3, -2)$ 일 때, $L(4, -3)$ 의 각 성분의 합을 구하면?(중앙대 2009)

- ① $-\frac{5}{3}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ 1 ④ 4

예제 1.16 다음과 같이 정의된 선형변환 $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ 에 대하여, T 의 치역을 구하면?(중앙대 2009)

$$T(x, y, z) = (-4y + 2z, -x - 9y + 4z, x + y)$$

- ① $\{(x, y, z) \mid x - 2y - z = 0\}$ ② $\{(x, y, z) \mid 2x - y - z = 0\}$
 ③ $\{(x, y, z) \mid 2x - y + z = 0\}$ ④ $\{(x, y, z) \mid x - 2y + z = 0\}$

예제 1.17 선형사상 $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $T(x, y) = (2y, x - y, 3x)$ 에 대한 다음 설명 중 옳은 것을 모두 고르면?(광운대 2012)

- (a) T 는 단사인 선형사상이다.
 (b) $U = \{T(x, y) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$ 의 차원은 2이다.
 (c) $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid T(x, y) = (0, 0, 0)\}$ 의 차원은 1이다.

① (a)

② (b)

③ (a), (b)

④ (a), (c)

⑤ (b), (c)

예제 1.18 다음 각 선형사상에 대해 영공간 $N(T)$ 와 치역 공간 $R(T)$ 의 기저와 차원을 구하여라.

- (1) $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $T(x, y, z) := (x + 2y, x - z, y + 2z)$
 (2) $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $T(x, y) := (x + y, x - y)$
 (3) $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $T(x, y, z) := (x + y, y - z)$

예제 1.19 함수 $T: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 가 선형변환이고 $T(1) = 2$ 일 때, 임의의 실수 x 에 대하여 $T(x)$ 는?(경기대 2015)

① $T(x) = 2x$

② $T(x) = 2x^2$

③ $T(x) = x + 1$

④ $T(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

4.2 선형사상과 행렬(Linear transformation and Matrix)

1. 유클리드 공간에서의 선형사상의 행렬

(1) 행렬 $A := [a_{ij}] \in M_{m,n}$ 가 주어졌을 때의 선형사상

행렬 $A := [a_{ij}] \in M_{m,n}$ 에 대해서 n 차원 열벡터 $\mathbf{x}$ 에 대해

$$T_A(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$$

로 정의된 사상 $T_A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ 는 선형사상이다. 이때 T_A 의 상(image)은 m 차원 열벡터이고 T_A 를 행렬 A 에 대응하는 선형사상이라고 한다.

(2) 표준행렬(Standard matrix)

$T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ 을 선형사상이라고 하자. 이 때 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ 는 표준기저 $\{\mathbf{e}_j \mid j = 1, 2, \dots, n\}$ 의 일차결합

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + \dots + x_n \mathbf{e}_n$$

으로 나타 낼 수 있고 T 가 선형사상이므로

$$\begin{aligned} T(\mathbf{x}) &= T(x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + \dots + x_n \mathbf{e}_n) \\ &= x_1 T(\mathbf{e}_1) + x_2 T(\mathbf{e}_2) + \dots + x_n T(\mathbf{e}_n) \\ &= [T(\mathbf{e}_1) : T(\mathbf{e}_2) : \dots : T(\mathbf{e}_n)] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \end{aligned}$$

이 되어 $m \times n$ 행렬 A 를

$$A = [T(\mathbf{e}_1) : T(\mathbf{e}_2) : \dots : T(\mathbf{e}_n)] \quad (\text{즉, } A^{(j)} = T(\mathbf{e}_j), j = 1, 2, \dots, n)$$

로 선택하면

$$T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} =: T_A(\mathbf{x})$$

가 된다.

$T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ 을 선형사상이라고 하자. 이 때 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ 에 대해서

$$T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} = T_A(\mathbf{x})$$

를 만족하는 행렬 $A \in M_{m,n}$ 이 유일하게 존재한다.

[참고] ① 이렇게 얻어진 행렬 A 를 선형사상 T 의 **표준행렬**(standard matrix)이라 한다.

② $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ 와 $S: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$ 가 선형사상이라 하고 $A \in M_{m,n}$ 와 $B \in M_{k,m}$ 를 각각 T 와 S 에 대한 표준행렬이라 하면 $(S \circ T)(\mathbf{x}) = S(T(\mathbf{x})) = B(A\mathbf{x}) = BA\mathbf{x}$ 이므로 $BA \in M_{k,n}$ 는 선형사상의 합성 $S \circ T$ 의 표준행렬이다.

예제 2.1 선형변환 $L: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ 가 아래와 같이 정의되었을 때 L 의 표준행렬을 구하여라.

$$L(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 + x_3 \end{bmatrix}$$

예제 2.2 $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ 가 다음과 같이 정의된 선형변환일 때 T 의 표준행렬은?

$$T(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 2x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 \\ -3x_1 + 2x_2 \end{bmatrix}$$

예제 2.3 $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ 가 $T(\mathbf{e}_1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $T(\mathbf{e}_2) = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $T(\mathbf{e}_3) = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ 에 의해 정의된 선형변환이라 할 때 3

차원 벡터 $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$ 에 대해 $T(\mathbf{x})$ 를 구하여라.

예제 2.4 선형변환 $F \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 - 4x_2 + 2x_3 \\ x_2 + x_3 \end{bmatrix}$ 일 때, $F(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ 가 되는 행렬 A 는? (단, $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ 이다.)

(서울과학기술대 2013)

① $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$

② $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & -4 \end{bmatrix}$

③ $\begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

④ $\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$

2. 벡터공간에서의 선형사상의 행렬표현

V 와 W 가 유한차원 벡터공간이고 $T: V \rightarrow W$ 가 선형사상일 때 T 에 대응하는 행렬에 대해 알아보자.

$B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ 와 $C = \{w_1, w_2, \dots, w_m\}$ 가 각각 벡터공간 V 와 W 의 순서기저이면 선형사상 $T: V \rightarrow W$ 에 다음을 만족하는 $m \times n$ 행렬 Q 가 존재한다.

$$[T(v)]_C = Q[v]_B, \quad (v \in V)$$

이때 Q 는 기저 B 와 C 에 대해 선형사상 T 를 나타내는 행렬로서

$$Q^{(j)} = [T(v_j)]_C, \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

이다. 단, $[v]_B$ 는 $v \in V$ 의 좌표행렬, $[T(v)]_C$ 는 $T(v) \in W$ 의 좌표행렬이다.

[참고] ① 기저 B 와 C 에 대해서 선형사상 $T: V \rightarrow W$ 를 나타내는 행렬 Q 를 T 와의 연계성을 강조하기 위해 $Q = [T]_{B,C}$ 로 나타내고, T 의 **표현행렬**이라고도 한다.

② $[T]_{B,C} = [T]_B^C$ 로 표현하기도 한다.

③ $V = W$ 이면 $B = C$ 이고 선형사상 $T: V \rightarrow V$ 에 대한 행렬 Q 는

$$Q^{(j)} = [T(v_j)]_B, \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

로 나타낸다. 이때 대응하는 행렬을 $Q = [T]_B$ 로 나타낸다.

3. 선형사상의 행렬표현의 유용한 정리

(1) $T: V \rightarrow W$ 가 선형사상이고 $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ 와 $C = \{w_1, w_2, \dots, w_m\}$ 가 각각 벡터공간 V 와 W 의 순서기저이면 T 에 대응하는 행렬은 다음과 같이 **첨가행렬의 기약행사다리꼴 변환**으로 얻어진다.

$$[w_1 \ w_2 \ \dots \ w_m : T(v_1) \ T(v_2) \ \dots \ T(v_n)] \sim_r [I_m : [T]_{B,C}]$$

(2) B, C, D 를 각각 유한차원 벡터공간 U, V, W 의 순서기저라 하면 선형사상 $S: U \rightarrow V$ 와 $T: V \rightarrow W$ 의 합성 $T \circ S: U \rightarrow W$ 에 대한 행렬은 다음을 만족한다.

$$[T \circ S]_{B,D} = [T]_{C,D} [S]_{B,C}$$

예제 2.5 $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ 를 다음과 같이 정의된 선형변환이라고 하자.

$$T(x_1, x_2) = (x_2, x_1 + x_2, x_1 - x_2)$$

$\mathbb{R}^2$ 의 (순서)기저 $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ 와 $\mathbb{R}^3$ 의 (순서)기저 $C = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\}$ 에 관한 T 의 행렬(또는 표현행렬)을 구하여라. 단 $\mathbf{v}_1 = (1, 2)$, $\mathbf{v}_2 = (3, 1)$, $\mathbf{w}_1 = (1, 0, 0)$, $\mathbf{w}_2 = (1, 1, 0)$, $\mathbf{w}_3 = (1, 1, 1)$ 이다.

예제 2.6 $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ 를 다음과 같이 정의된 선형변환이라고 하자.

$$T(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, -2x_1 + 4x_2)$$

$\mathbb{R}^2$ 의 (순서)기저 $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ 에 관한 T 의 행렬(또는 표현행렬)을 구하여라. 단 $\mathbf{v}_1 = (1, 1)$, $\mathbf{v}_2 = (1, 2)$ 이다.

예제 2.7 $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ 를 다음과 같이 정의된 선형변환이라고 하자.

$$T(x_1, x_2) = (x_2, x_1 + x_2, x_1 - x_2)$$

$\mathbb{R}^2$ 의 (순서)기저 $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ 와 $\mathbb{R}^3$ 의 (순서)기저 $C = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\}$ 에 관한 T 의 행렬(또는 표현행렬)을 구하여라. 단 $\mathbf{v}_1 = (3, 1)$, $\mathbf{v}_2 = (5, 2)$, $\mathbf{w}_1 = (1, 0, -1)$, $\mathbf{w}_2 = (-1, 2, 2)$, $\mathbf{w}_3 = (0, 1, 2)$ 이다.

예제 2.8 $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ 를 다음과 같이 정의된 선형변환이라고 하자.

$$T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2, x_2 - x_3, x_3 - x_1)$$

$\mathbb{R}^3$ 의 기저 $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ 에 대해 다음을 구하여라. 단, $\mathbf{v}_1 = (1, 0, 1)$, $\mathbf{v}_2 = (0, 1, 1)$, $\mathbf{v}_3 = (1, 1, 0)$ 이다.

- (1) 기저 B 에 대한 T 의 행렬 $[T]_B$ 를 구하여라.
- (2) (1)의 결과를 이용하여 $\mathbf{v} = (2, 1, 0)$ 에 대해 $T(\mathbf{v})$ 를 구하여라.

예제 2.9 $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ 와 $S: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ 를 각각 다음과 같이 정의된 선형변환이라 하자.

$$T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - 3x_2 + x_3, 5x_2 - x_3)$$

$$S(x_1, x_2) = (3x_1 - x_2, x_1 + x_2, 3x_1 + 2x_2)$$

- (1) S 와 T 의 합성 $S \circ T$ 에 대한 식을 구하여라.
- (2) $S \circ T$ 에 대응하는 행렬을 구하여라.

예제 2.10 선형사상(일차변환) $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ 가 다음과 같이 정의되었다고 하자.

$$T(x, y, z) = (2x + 3y - 4z, x - 5y + z)$$

이 때 $\mathbb{R}^3$ 의 순서기저(ordered basis) $\alpha = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$ 와 $\mathbb{R}^2$ 의 순서기저 $\beta = \{(1, 1), (0, 1)\}$ 에 관한 T 의 행렬표현을 구하라. (중앙대 2006)

① $\begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & -5 & 1 \end{bmatrix}$

② $\begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -3 & -4 & 1 \end{bmatrix}$

③ $\begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & -2 & 5 \end{bmatrix}$

④ $\begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -4 & -9 & -1 \end{bmatrix}$

예제 2.11 벡터공간 $V = \{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f(t) = \alpha \cos t + \beta \sin t, \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ 에서 선형변환 $L: V \rightarrow V$ 가 $L(f)(t) = f''(t) - f'(t)$ 로 정의되고, V 의 순서기저(ordered basis)가 $B = \{\cos t, \sin t\}$ 로 주어질 때, L 의 표현행렬을 구하여라. (중앙대 1988)

예제 2.12 벡터공간 $\mathbb{R}^3$ 의 순서기저(ordered basis) $\alpha = \{(1, 0, 1), (1, 1, 0), (0, 1, 1)\}$ 와 2차 이하의 차수를 갖는 다항식의 벡터공간 $P_2(\mathbb{R})$ 의 순서기저 $\beta = \{1, 1+t, 1+t+t^2\}$ 가 주어져 있다. 선형변환 $L: \mathbb{R}^3 \rightarrow P_2(\mathbb{R})$ 의 α, β 에 대응하는 행렬이

$$[L]_{\alpha}^{\beta} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & -3 & -1 \end{bmatrix}$$

이라 할 때, $L(2, -1, 1)$ 을 구하면? (중앙대 2008)

① $4 + 6t + 3t^2$

② $-1 + 3t^2$

③ $11 - 4t + 4t^2$

④ $-9 + 4t + 4t^2$

예제 2.13 $\alpha = \{(0, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 0)\}$, $\beta = \{w_1, w_2, w_3\}$ 를 $\mathbb{R}^3$ 의 순서기저(ordered basis)라 하

자. 선형변환 $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ 의 α, β 에 관한 행렬표현이 $[T]_{\alpha}^{\beta} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 7 \\ -2 & 6 & 0 \end{bmatrix}$ 와 같을 때, $T(2, 3, 1)$ 을 구하면?

(중앙대 2010)

① $4w_1 + 15w_2 + 14w_3$

② $-4w_1 + 13w_2 + w_3$

③ $2w_1 + 15w_2 - 2w_3$

④ $w_1 + 2w_3$

4. 직교변환의 행렬

기하학적인 관점에서 $\mathbb{R}^2$ 및 $\mathbb{R}^3$ 에서의 특수한 선형변환을 살펴보자. 특히 강체운동(rigid motion)을 기술하고자 할 때 자연스럽게 벡터의 길이를 보존하는 선형변환을 생각할 수 있다. 크기를 보존하는 선형변환 $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ 을 직교변환(orthogonal transformation)이라고 한다.

$$T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ 직교변환} \Leftrightarrow \|T(\mathbf{v})\| = \|\mathbf{v}\|, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$$

[참고] ① $A \in M_n$: 직교행렬(orthogonal matrix) $\Leftrightarrow AA^t = I_n = A^t A$

② 회전변환(rotation transformation)과 반사변환(reflection transformation)은 대표적인 직교변환이다.

③ (정)사영변환(projection transformation)은 직교변환은 아니지만 중요한 변환 중 하나이다.

5. 회전변환(Rotation transformation)

변환 ($\mathbb{R}^2$)	표준행렬	변환 ($\mathbb{R}^3$)	표준행렬
평면에서 반시계 방향으로 θ 만큼 회전	$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$	x 축을 중심으로 θ 만큼 회전	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$
		y 축을 중심으로 θ 만큼 회전	$\begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}$
		z 축을 중심으로 θ 만큼 회전	$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

[주의] 3차원 회전변환의 방향은 오른손법칙을 따른다.

(1) 회전변환의 표준행렬에 대한 일반적인 성질

① 직교행렬이다.

② 행렬식은 1이다.

③ 회전변환의 표준행렬 $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \Rightarrow A^n = \begin{bmatrix} \cos(n\theta) & -\sin(n\theta) \\ \sin(n\theta) & \cos(n\theta) \end{bmatrix}$.

④ 회전변환의 표준행렬 $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$.

(2) 회전축과 회전각

회전변환을 나타내는 행렬이 A 일 때, 회전축과 회전각을 다음과 같이 구한다.

① 회전축은 $A\mathbf{x} = \mathbf{x}$ 를 만족하는 벡터 $\mathbf{x}$ 이다.

② 회전각은 $\cos\theta = \frac{\text{tr}(A) - 1}{2}$ 이다.

예제 2.14 행렬 $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ 의 역행렬을 $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 라고 할 때, $b + c$ 의 값을 구하면?(광운대 2009)

- ① $-\sin\theta$ ② $\cos\theta$ ③ $\sin\theta + \cos\theta$ ④ 0 ⑤ $2\sin\theta + 1$

예제 2.15 좌표평면 상의 점 $(1, 2)$ 를 원점을 중심으로 60° 회전하였을 때, 대응하는 점의 좌표는?(한성대 2012)

- ① $\left(\frac{1-2\sqrt{3}}{2}, \frac{2+\sqrt{3}}{2}\right)$ ② $\left(\frac{1+2\sqrt{3}}{2}, \frac{2-\sqrt{3}}{2}\right)$
 ③ $\left(\frac{1-\sqrt{3}}{4}, \frac{1+\sqrt{3}}{4}\right)$ ④ $\left(\frac{1+\sqrt{3}}{4}, \frac{1-\sqrt{3}}{4}\right)$

예제 2.16 x 축의 양의 방향과 이루는 각이 $\frac{\pi}{6}$ 이며, 원점을 지나는 직선에 대하여 반사에 의한 벡터 $(1, 1)$ 의 상은?(국민대 2011)

- ① $\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ② $\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
 ③ $\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ④ $\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

예제 2.17 행렬 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ 은 $\mathbb{R}^3$ 의 원점을 지나는 직선에 관한 회전을 나타낸다. 회전축은?(국민대 2011)

① $y = x, z = 0$

② x 축

③ y 축

④ z 축

예제 2.18 행렬 $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ 은 $\mathbb{R}^3$ 의 원점을 지나는 직선에 대한 회전을 나타낸다. 회전각은?(국민대 2010)

① $\frac{\pi}{3}$

② $\frac{\pi}{2}$

③ $\frac{2}{3}\pi$

④ π

예제 2.19 영이 아닌 임의의 벡터 $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ 에서 행렬 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 를 $A = I_n - \frac{2}{\mathbf{u}^T \mathbf{u}} \mathbf{u} \mathbf{u}^T$ 로 정의 할 때, A 의 고유값(eigenvalue)이 λ 라면 $\|\lambda\|_2$ 는?(한양대 2008) (단, $\lambda = a + bi$ 에서 $\|\lambda\|_2 = \sqrt{a^2 + b^2}$)

① 1

② $\sqrt{2}$

③ e

④ 2

6. 반사변환(Reflection transformation)

변환 ($\mathbb{R}^2$)	표준행렬	변환 ($\mathbb{R}^3$)	표준행렬
x 축에 반사 $T(x, y) = (x, -y)$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$	xy 평면에 반사 $T(x, y, z) = (x, y, -z)$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$
y 축에 반사 $T(x, y) = (-x, y)$	$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	yz 평면에 반사 $T(x, y, z) = (-x, y, z)$	$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
직선 $y = x$ 에 반사 $T(x, y) = (y, x)$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$	zx 평면에 반사 $T(x, y, z) = (x, -y, z)$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
직선 $y = -x$ 에 반사 $T(x, y) = (-y, -x)$	$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$		

[주의] ① 반사변환을 **대칭변환**이라고도 한다.

② 원점을 지나는 평면 $\pi : ax + by + cz = 0$ 에서의 반사변환의 표준행렬은

$$A = I_3 - \frac{2}{\mathbf{n}^t \mathbf{n}} \mathbf{n} \mathbf{n}^t$$

이다. 여기서 $\mathbf{n} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ 는 평면 π 의 법선벡터이다.

(1) 반사변환의 표준행렬에 대한 일반적인 성질

- ① 직교행렬이다.
- ② 대칭행렬이다.
- ③ 행렬식은 -1 이다.
- ④ 고윳값은 1 과 -1 이다.
 - (i) 고윳값 1 에 대응하는 고유벡터는 평면 위의 벡터들이고,
 - (ii) 고윳값 -1 에 대응하는 고유벡터는 법선벡터와 평행인 벡터들이다.

예제 2.20 $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ 가 임의의 벡터를 평면 $x + 2y + 3z = 0$ 에 대하여 대칭인 벡터로 보내는 선형사상이라고 하자. 다음 중 $T(1, 2, 3)$ 의 값은?(홍익대 2011)

- ① $(-1, -2, -3)$ ② $(2, 2, -2)$ ③ $(0, 3, -2)$ ④ $(1, 5, 1)$

예제 2.21 $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ 가 임의의 벡터를 평면 $x + 2y + 3z = 0$ 에 대하여 대칭인 벡터로 보내는 선형사상이라고 하자. 다음 중 T 의 고유벡터가 아닌 것은?(홍익대 2011)

- ① $(1, 5, 1)$ ② $(2, 2, -2)$ ③ $(0, 3, -2)$ ④ $(1, 2, 3)$

7. 사영변환(Projection transformation)

변환 ($\mathbb{R}^2$)	표준행렬	변환 ($\mathbb{R}^3$)	표준행렬
x 축 위로의 사영 $T(x, y) = (x, 0)$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$	xy 평면 위로의 사영 $T(x, y, z) = (x, y, 0)$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
		yz 평면 위로의 사영 $T(x, y, z) = (0, y, z)$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
y 축 위로의 사영 $T(x, y) = (0, y)$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	zx 평면 위로의 사영 $T(x, y, z) = (x, 0, z)$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

[주의] ① 사영은 **정사영**을 의미한다.

② 원점을 지나는 평면 $\pi : ax + by + cz = 0$ 에서의 사영변환의 표준행렬은

$$A = I_3 - \frac{1}{\mathbf{n}^t \mathbf{n}} \mathbf{n} \mathbf{n}^t$$

이다. 여기서 $\mathbf{n} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ 는 평면 π 의 법선벡터이다.

(1) 사영변환의 표준행렬에 대한 일반적인 성질

- ① $A^2 = A$ 이다. 따라서, 임의의 자연수 $n \geq 2$ 에 대하여 $A^n = A$ 이다.
- ② 대칭행렬이다.
- ③ 행렬식은 0이다.
- ④ 고윳값은 1과 0이다.
 - (i) 고윳값 1에 대응하는 고유벡터는 평면 위의 벡터들이고,
 - (ii) 고윳값 0에 대응하는 고유벡터는 법선벡터와 평행인 벡터들이다.

예제 2.22 임의의 벡터 $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ 을 평면 $x + y - 3z = 0$ 에 사영시키는 사영행렬(projection matrix) A 라 할 때, A^2 의 행렬식 값(determinant)은?(한양대 2008)

① 0

② 1

③ 3

④ 4

예제 2.23 행벡터 $\mathbf{v}^T = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{6}} \right)$ 일 때, $I - \mathbf{v}\mathbf{v}^T$ 의 행렬식(determinant) 은?(한양대 2009)

단, I 는 단위행렬이다.

① 0

② 1

③ $\sqrt{6}$

④ 36

8. 면적 및 부피와 선형변환과의 관계

선형변환 $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ 에 대응하는 행렬을 $A \in M_{m,n}$ 라 할 때, 이 행렬 A 를 이용하여 선형변환에 의한 영역의 면적 및 부피를 구하는 기하학적 문제에 대해서 알아보자.

(1) n -box

$\mathbb{R}^m$ 에 속하는 일차독립인 n 개의 벡터를 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ 이라 할 때,

$$\mathbf{x} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \dots + \alpha_n \mathbf{v}_n$$

을 만족하는 $\mathbb{R}^m$ 안의 모든 벡터 $\mathbf{x}$ 들의 집합을 $\mathbb{R}^m$ 안의 n -box라 한다.

(단, $n \leq m, 0 \leq \alpha_i \leq 1, i = 1, 2, \dots, n$ 이다.)

[참고] $\mathbb{R}^m$ 안의 2-box 는 두 벡터에 의하여 생성되는 평행사변형을 의미 한다.

(2) 선형변환과 면적 및 부피

① $\mathbb{R}^m$ 에 속하는 일차독립인 n 개의 벡터 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ 에 의하여 결정되는 n -box의 부피(Volume) $Vol = \sqrt{\det(A^t A)}$ 이다.

이때 행렬 A 의 j 번째 열벡터 $A^{(j)} = \mathbf{v}_j$ 인 $m \times n$ 행렬이다.

② 행렬 A 가 일차독립인 n 개의 벡터 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ 를 열벡터로 갖는 n 차 정방행렬이면 n 개의 벡터에 의하여 결정되는 n -box의 부피(Volume) $Vol = |\det(A)|$ 이다.

③ $\mathbb{R}^n$ 상의 영역 S 의 부피(Volume)가 $Vol(S)$ 이고 $m \geq n$ 이라 하자. 선형변환 $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ 의 표현행렬 A 이고 $rank(A) = n$ 일 때, 다음이 성립한다.

$$Vol(T(S)) = \sqrt{\det(A^t A)} \cdot Vol(S)$$

개념 및 내용

예제 2.24 $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ 가 $T(x, y) = (2x + 3y, x - y, 2y)$ 으로 정의된 선형변환일 때, T 에 의한 영역 $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$ 의 상(image) $T(S)$ 의 면적을 구하여라.

예제 2.25 좌표평면 상의 세 점 $A(0, 0)$, $B(12, 2)$, $C(1, 4)$ 를 꼭짓점으로 하는 삼각형이 행렬 $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ 로 나타내어지는 일차(선형)변환에 의하여 옮겨지는 도형을 S 라 할 때, S 의 면적을 구하면?(중앙대 2003)

① 132

② 157

③ 184

④ 375

예제 2.26 선형사상 $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ 가 $T(1, 0) = (2, 3)$, $T(0, 1) = (1, -2)$ 로 정의된다고 하자. T 에 의해 세 점 $P(2, 3)$, $Q(-1, 0)$, $R(1, -2)$ 이 옮겨지는 점을 각각 A , B , C 라 할 때 삼각형 ABC 의 넓이는?(국민대 2010)

① 4

② 14

③ 24

④ 42

예제 2.27 xy 평면에서 주어진 영역 S 의 면적이 1 일 때, 변환 $u = 2x + y + 1$, $v = x + 2y - 2$ 에 의한 uv 평면에서 S 의 상(image)의 면적을 구하시오. (홍익대 2009)

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 경우에 따라 다르다.

예제 2.28 다음 영역 $S = \left\{ (u, v, w) \left| \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \right\}$ 의 부피는?

- ① $\frac{4\pi}{3}$ ② $\frac{8\pi}{3}$ ③ $\frac{12\pi}{3}$ ④ $\frac{16\pi}{3}$

4.3 기저의 변환과 행렬의 닮음(Change of basis and Similarity of matrix)

1. 기저의 변환(Change of basis)

많은 응용문제들은 한 좌표계로부터 다른 좌표계로 변환함으로써 단순화할 수 있다. 벡터공간에서 좌표계를 바꾸는 것은 본질적으로 기저를 바꾸는 것과 동일하다.

벡터공간에서 기저의 변환은 다음과 같다.

n 차원 벡터공간 V 의 두 순서기저를 각각 $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ 와 $C = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_n\}$ 라 하고 $n \times n$ 행렬 P 를 열이 다음과 같이 주어진 행렬이라 하자.

$$P^{(j)} = [\mathbf{v}_j]_C, \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

그러면 P 는 정칙행렬이고 V 의 벡터 $\mathbf{v}$ 에 대해서

$$[\mathbf{v}]_C = P[\mathbf{v}]_B$$

가 성립한다.

[참고] ① 이때, 행렬 P 를 벡터공간 V 의 B 에서 C 로의 **추이행렬**(transition matrix)이라 한다.

② $[\mathbf{v}]_B = P^{-1}[\mathbf{v}]_C$ 이고, P^{-1} 는 벡터공간 V 의 C 에서 B 로의 **추이행렬**이다.

③ 추이행렬은 전이행렬이라고도 한다.

2. 기저의 변환과 선형사상

벡터공간 V 의 서로 다른 두 개의 순서기저 B 와 C 의 변환을 통해서 얻어진 추이행렬을 이용하여 V 상에서 정의된 선형사상에 대한 행렬을 다음과 같이 구할 수 있다.

$T: V \rightarrow V$ 를 n 차원 벡터공간 V 상에서의 선형사상이라 하고, V 의 두 순서기저를 각각 $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ 와 $C = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_n\}$ 라고 하면 B 에서 C 로의 추이행렬 P 에 대해 다음 관계식이 성립한다.

$$[T]_C = P[T]_B P^{-1}$$

[참고] $[T]_B$ 는 선형사상 $T: V \rightarrow V$ 에 대한 순서기저 B 에 대한 표현행렬이다.

3. 행렬의 닮음(Similarity of matrix)

(1) 정의

n 차 정방행렬 A 와 B 에 대해

$$A = P^{-1}BP$$

인 가역행렬 P 가 존재하면 A 는 B 와 닮음행렬(similar matrix)이라 하고, $A \sim B$ 라고 표기한다.

(2) 닮음행렬의 성질

A 와 B 가 닮음행렬일 때 다음이 성립한다.

- ① $\det(A) = \det(B)$
- ② 모든 자연수 k 에 대하여 A^k 와 B^k 은 닮음행렬이다.
- ③ A 와 B 가 닮음행렬 & B 와 C 가 닮음행렬이면 A 와 C 도 닮음행렬이다..

(3) 선형사상과 행렬의 닮음

$T: V \rightarrow V$ 를 n 차원 벡터공간 V 상에서의 선형사상이라 하고, V 의 두 순서기저를 각각 $\alpha = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ 와 $\beta = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ 라고 하면 α 에서 β 로의 추이행렬 P 에 대해 다음 관계식이 성립한다.

$$[T]_{\beta} = P[T]_{\alpha}P^{-1}$$

[참고] $[T]_{\alpha}$ 는 $[T]_{\beta}$ 와 닮음행렬이다.

개념 및 내용

예제 3.1 $V = P_2$ 의 기저를 $B = \{1, x, x^2\}$, $C = \{1, x+1, x^2+x+2\}$ 라고 하자.

- (1) 각 $r(x) \in V$ 에 대해 $P[r(x)]_B = [r(x)]_C$ 를 만족하는 추이행렬 P 를 구하여라.
- (2) (1)의 결과를 이용하여 $r(x) = 1 - 2x + 3x^2$ 일 때, $[r(x)]_C$ 를 구하여라.

예제 3.2 $V = P_2$ 이고 $T: V \rightarrow V$ 를 다음과 같이 정의된 선형변환이라고 하자.

$$T(a_0 + a_1x + a_2x^2) = (a_1 - 2a_2) + (2a_0 + 3a_2) + 2a_2x^2$$

V 의 두 (순서)기저를 $B = \{1, x, x^2\}$, $C = \{1+x, 1-x, x+x^2\}$ 라고 하자. $[T]_B$ 와 $[T]_C$ 를 구하여라.

예제 3.3 A, B, C 가 $n \times n$ 행렬일 때, 다음이 성립함을 보여라.

- (1) $A \sim A$ (즉, A 는 자기 자신과 닮음이다.)
- (2) $A \sim B$ 이면, $B \sim A$ 이다.
- (3) $A \sim B$ 이고 $B \sim C$ 이면, $A \sim C$ 이다.

예제 3.4 A 와 B 가 $A \sim B$ 인 $n \times n$ 행렬일 때, 다음이 성립함을 보여라.

- (1) $\det(A) = \det(B)$
- (2) A : 가역행렬 $\Leftrightarrow B$: 가역행렬
- (3) $\text{rank}(A) = \text{rank}(B)$

PART

+

-

×

÷

05

내적공간과 직교화

(Inner product space and Orthogonalization)

5.1 내적공간(Inner product space)

5.2 직교성과 그람-슈미트 직교화 과정
(Orthogonality & Gram-Schmidt orthogonalization process)

5.3 최소제곱문제(Least Squares Problem)

5.1 내적공간(inner product space)

1. 내적공간(inner product space)

벡터공간을 다루는데 있어서 **내적(inner product)**은 벡터의 크기뿐만 아니라 벡터의 사잇각 등 벡터사이의 위치관계를 나타내는 주요한 소재이다. 내적의 기본적인 아이디어는 $\mathbb{R}^n$ 공간에서 정의된 유클리드 내적의 성질이며, 이것을 일반적인 벡터공간으로 확장한 것이 내적의 정의이다.

$(V, +, \cdot)$ 가 벡터공간이라 하자. 함수 $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ 가 아래 조건(또는 성질)을 만족할 때 V 위에서의 **내적(inner product)**이라 하고, $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ 를 **내적공간(inner product space)**이라 한다.

임의의 $u, v, w \in V$ & 임의의 스칼라 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ 에 대하여 다음이 성립한다.

- | | |
|---|-------|
| (1) $\langle v, v \rangle \geq 0$ & $\langle v, v \rangle = 0 \Leftrightarrow v = \vec{0}$ | [양성] |
| (2) $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$ | [교환성] |
| (3) $\langle \alpha u, v \rangle = \alpha \langle u, v \rangle = \langle u, \alpha v \rangle$ | [동차성] |
| (4) $\langle u, v + w \rangle = \langle u, v \rangle + \langle u, w \rangle$ | [분배성] |

[참고] ① 내적이 정의된 벡터공간을 **내적공간(inner product space)**이라 한다.

② (3)과 (4)의 성질은 $\langle u, \alpha v + \beta w \rangle = \alpha \langle u, v \rangle + \beta \langle u, w \rangle$ 로 나타낼 수 있다.

2. 내적공간에서 벡터의 크기와 거리

V 가 내적공간일 때 벡터의 **크기(size)** 또는 **길이(length)**와 두 벡터 사이의 **거리(distance)**를 정의할 수 있다. 이렇게 크기(length)가 부여된 공간은 **노름공간(normed space)**이 되고, 거리(distance)가 부여된 공간은 **거리공간(metric space)**이 된다.

(1) 크기(또는 길이, length)

임의의 벡터 $v \in V$ 에 대해서 다음과 같이 벡터의 크기를 정의하고 v 의 노름(norm)이라고 하고 $\|v\|$ 로 나타낸다.

$$\|v\| := \sqrt{\langle v, v \rangle}$$

(2) 거리(distance)

임의의 두 벡터 $u, v \in V$ 에 대해서 다음과 같이 벡터의 거리를 정의하고 u 와 v 의 거리(distance)이라고 하고 $d(u, v)$ 로 나타낸다.

$$d(u, v) := \|u - v\|$$

[참고] ① 단위벡터(unit vector) $u \Leftrightarrow \|u\| = 1$ (즉, 크기가 1인 벡터)

② $\|u\| = 1 \Leftrightarrow \|u\|^2 = 1 \Leftrightarrow \langle u, u \rangle = 1$.

③ $u \neq \vec{0} \Rightarrow \pm \frac{1}{\|u\|} u$ 는 단위벡터이다.

3. 기본적인 내적공간의 몇 가지 예

(1) $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ & $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n), \mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$

① (표준)유클리드 내적(Euclidean inner product)

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} := \sum_{k=1}^n x_k y_k = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$$

② 가중 유클리드 내적(weighted Euclidean inner product)

주어진 $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n), (\omega_k > 0, \forall k = 1, 2, \dots, n)$ 에 대하여 다음과 같이 정의한다.

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_{\omega} := \sum_{k=1}^n \omega_k x_k y_k = \omega_1 x_1 y_1 + \omega_2 x_2 y_2 + \dots + \omega_n x_n y_n$$

③ 유클리드 내적의 행렬의 곱 표현

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \mathbf{y}^t \mathbf{x}$$

④ 행렬 A 에 의해 생성된 내적

$A = [a_{ij}] \in M_{m,n}$ 가역일 때, 내적을 다음과 같이 정의한다.

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_A = \mathbf{Ax} \cdot \mathbf{Ay} = (\mathbf{Ay})^t (\mathbf{Ax}) = \mathbf{y}^t A^t A \mathbf{x}$$

(2) $(M_{m,n}, +, \cdot)$ & $M_{m,n} := \{A = [a_{ij}] \mid a_{ij} \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$

① 트레이스 내적(trace inner product)

$$\langle A, B \rangle := \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{ij} = \text{tr}(AB^t)$$

(3) $(P_n, +, \cdot)$ & $P_n := \left\{ p(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k \mid a_k \in \mathbb{R}, k = 0, 1, 2, \dots, n \right\}$

$x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ 이 서로 다른 n 개의 실수일 때, $p, q \in P_n$ 에 대하여 내적을 다음과 같이 정의한다.

$$\langle p, q \rangle := \sum_{k=0}^n p(x_k) q(x_k)$$

(4) $(C([a, b]), +, \cdot)$ & $C([a, b]) := \{f \mid f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} : \text{연속}\}$

① 적분을 사용한 내적

$$\langle f, g \rangle := \int_a^b f(x) g(x) dx$$

② 적분을 사용한 가중 내적

$$\langle f, g \rangle_{\omega} := \int_a^b f(x) g(x) \omega(x) dx \quad (\text{단, } \omega(x) > 0 \text{ \& } \omega \in C([a, b]))$$

4. 내적의 기본성질

(1) 【코시-슈바르츠 부등식】(Cauchy-Schwarz' Inequality)

($V, \langle \cdot, \cdot \rangle$)가 내적공간이고 $\|v\| := \sqrt{\langle v, v \rangle}$ 로 정의된 양의 실수에 대해 다음부등식이 성립한다.

$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\|, \quad \forall u, v \in V$$

(2) 【삼각부등식】(Triangle Inequality)

($V, \langle \cdot, \cdot \rangle$)가 내적공간이고 $\|v\| := \sqrt{\langle v, v \rangle}$ 로 정의된 양의 실수에 대해 다음부등식이 성립한다.

$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|, \quad \forall u, v \in V$$

(3) 【피타고라스 정리】(Pythagorean theorem)

($V, \langle \cdot, \cdot \rangle$)가 내적공간이고 영이 아닌 두 벡터 $u, v \in V$ 에 대해 다음이 성립한다.

$$u \perp v \Leftrightarrow \langle u, v \rangle = 0 \Leftrightarrow \|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$$

[참고] ① 코시-슈바르츠 부등식에 의하면 영이 아닌 두 벡터 u 와 v 에 대하여

$$-1 \leq \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \|v\|} \leq 1$$

이므로 다음 조건을 만족하는 실수 θ 가 유일하게 존재한다.

$$\cos \theta = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \|v\|}, \quad 0 \leq \theta \leq \pi$$

이와 같이 정의한 θ 는 두 벡터 u 와 v 의 **사잇각(intersection angle)**이라고 정의한다.

② 「**내적공간의 주요한 특징 중의 하나는 직교성(orthogonality)을 부여할 수 있다**」는 데 있다.

내적공간의 두 벡터 u 와 v 의 수직 또는 직교(orthogonal)를 $u \perp v$ 로 표현하고 다음과 같이 정의한다.

$$u \perp v \Leftrightarrow \langle u, v \rangle = 0$$

③ 【정사영: Projection】

① $\alpha = \frac{\langle u, v \rangle}{\|v\|}, (v \neq \vec{0}) \Leftrightarrow v$ 위로 u 의 **스칼라 사영**(scalar projection)

② $\text{Pr}_v(u) = \alpha \left(\frac{1}{\|v\|} v \right) = \frac{\langle u, v \rangle}{\langle v, v \rangle} v \Leftrightarrow v$ 위로 u 의 **벡터 사영**(vector projection)

③ $(u - \text{Pr}_v(u)) \perp v$

④ $u = \text{Pr}_v(u) \Leftrightarrow \exists \beta \in \mathbb{R} \text{ s.t. } u = \beta v$

예제 1.1 2차 대칭행렬(symmetric matrix) $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ 와 $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ 에 대해서 다음과

같이 정의된 함수는 $\mathbb{R}^2$ 상에서 내적(inner product)이 되는지 결정하여라.

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_A := \mathbf{u}^t A \mathbf{v} = 3u_1v_1 + 2u_1v_2 + 2u_2v_1 + 4u_2v_2$$

예제 1.2 $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ 을 서로 다른 $n+1$ 개의 실수라 하자. n 차 다항식 공간 P_n 에서 다음과 같이 정의된 것이 내적(inner product)이 되는지 결정하여라.

$$\langle p, q \rangle := \sum_{k=0}^n p(x_k)q(x_k)$$

예제 1.3 가중 유클리드 내적(weighted Euclidean inner product)은 대각행렬 $A = \begin{bmatrix} \sqrt{\omega_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sqrt{\omega_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$ 에

의해 생성된 $\mathbb{R}^n$ 에서의 내적임을 보여라.

예제 1.4 $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}] \in M_{m,n}$ 에 대해서 아래와 같이 정의할 때 다음 물음에 답하여라.

$$\langle A, B \rangle := \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{ij}$$

(1) $M_{m,n}$ 에서 내적을 이름을 보여라.

(2) $\langle A, B \rangle = \text{tr}(AB^t)$ 즉, $\langle A, B \rangle$ 는 AB^t 의 대각원소의 합과 같음을 보여라.

[참고] 이를 $M_{m,n}$ 에서의 **트레이스 내적**(trace inner product)이라고 한다. 또한 트레이스 내적에 의해 $M_{m,n}$ 상에서 유도된 **노름**(norm)을 **프로베니우스 노름**(Frobenius norm)이라 하고 $\|A\|_F$ 로 표현한다.

예제 1.5 연속인 함수 공간 $C([-1, 1])$ 에서 내적을 $\langle f, g \rangle := \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx$ 로 정의한다.

(1) $x \perp x^2$ 인가? (즉, x 와 x^2 이 서로 직교인가?)

(2) $\|x + x^2\|$ 은 얼마인가?

예제 1.6 유클리드 내적공간 $\mathbb{R}^4$ 의 두 벡터 $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ 에 대해서 다음 물음에 답하여라.

- (1) $\mathbf{x}$ 와 $\mathbf{y}$ 의 **사잇각**(intersection angle) θ 는?
- (2) $\mathbf{y}$ 위로 $\mathbf{x}$ 의 **벡터 사영**(vector projection) $\text{Pr}_{\mathbf{y}}(\mathbf{x})$ 는?
- (3) $\mathbf{x} - \text{Pr}_{\mathbf{y}}(\mathbf{x})$ 와 $\text{Pr}_{\mathbf{y}}(\mathbf{x})$ 는 서로 **직교**(orthogonal)하는가? (즉, $(\mathbf{x} - \text{Pr}_{\mathbf{y}}(\mathbf{x})) \perp \text{Pr}_{\mathbf{y}}(\mathbf{x})$ 인가?)
- (4) $\|\mathbf{x}\|$, $\|\text{Pr}_{\mathbf{y}}(\mathbf{x})\|$, $\|\mathbf{x} - \text{Pr}_{\mathbf{y}}(\mathbf{x})\|$ 의 값을 구하고, **피타고라스 정리**(Pythagorean theorem)가 성립하는지 확인 하여라.

5. 직교여공간(orthogonal complement)

(1) 정의

$(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ 가 내적공간이고 $W \subset V$ 일 때 W 의 **직교여집합**(orthogonal complement)을 다음과 같이 정의하고 $W^\perp$ 로 표기한다.

$$W^\perp := \{v \in V \mid \langle v, w \rangle = 0, \forall w \in W\}$$

[참고] $W^\perp$ 는 “ W perpendicular” 또는 “ W perp”라고도 한다.

(2) 기본성질

V 가 내적공간이고 $W \subset V$ 일 때 다음이 성립한다.

- ① $W^\perp \subset V$
- ② $W \cap W^\perp = \{\vec{0}\}$

6. 노름공간(normed space)

(1) 정의

$(V, +, \cdot)$ 가 벡터공간이라 하자. 함수 $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$ 가 아래 조건(또는 성질)을 만족할 때 V 위에서의 **노름**(norm)이라 하고, $(V, \|\cdot\|)$ 를 **노름공간**(normed space)이라 한다.

임의의 $u, v \in V$ 와 임의의 스칼라 $\alpha \in \mathbb{R}$ 에 대하여 다음이 성립한다.

- (1) $\|v\| \geq 0$ & $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = \vec{0}$ (양성)
- (2) $\|\alpha v\| = |\alpha| \|v\|$ (동차성)
- (3) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ (삼각부등식)

[참고] 일반적으로 수학 및 응용수학에서 자주 다루는 용어인 **노름**(norm)은 내적과 상관없는 고유한 의미를 가지며, 일반적으로 벡터들 사이의 거리를 측정하는 방법을 제시한다.

또한 많은 응용분야가 벡터공간 V 에서 주어진 벡터 v 와 가장 가까운 벡터를 부분공간 S 에서 찾는 것과 연관되어 있다. V 에서 사용되는 노름이 내적 연산으로부터 유도된 것이라면 가장 근접한 벡터는 부분공간 S 위로 v 의 **벡터 사영**이 될 것이다.

(2) $\mathbb{R}^n$ 의 다양한 노름

- ① $\|x\|_1 := \sum_{k=1}^n |x_k| = |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n| \Leftrightarrow l_1\text{-노름}$
- ② $\|x\|_\infty := \max\{|x_k| \mid k = 1, 2, \dots, n\} \Leftrightarrow l_\infty\text{-노름 또는 평등노름(uniform norm)}$
- ③ $\|x\|_2 := \sqrt{\langle x, x \rangle} = \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^2 \right)^{1/2} \Leftrightarrow l_2\text{-노름}$

[주의] l_2 -노름은 내적에 의해서 유도된 노름이지만, l_1 과 l_∞ -노름은 내적에 의해서 유도되지 않는다. 따라서 수직성에 대한 피타고라스 정리가 성립하지 않는다.

7. 수반사상(adjoint mapping)

$T: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ 이 선형사상일 때 다음과 같이 내적 관계에 의해 정의된 $T^*: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ 를 T 의 **수반사상**(adjoint mapping)이라고 한다.

$$\langle T(\mathbf{x}), \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, T^*(\mathbf{y}) \rangle, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^m, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$$

8. 수반사상과 관련된 주요정리

(1) 선형사상 $T: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ 가 선형사상일 때 다음이 성립한다.

- ① $T^*: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ 는 선형사상이다.
- ② $T^{**} = T$

(2) 【부분공간의 기본정리: Fundamental subspaces theorem】

선형사상 $T: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ 과 수반사상 $T^*: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ 에 대해서 다음이 성립한다.

$$N(T^*) = R(T)^\perp \quad \& \quad R(T^*) = N(T)^\perp$$

(3) 선형사상 $T: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ 과 수반사상 $T^*: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ 에 대해서 다음이 성립한다.

$$\dim(R(T)) = \dim(R(T^*))$$

(4) $A \in M_{m,n}$ 에 대해서 다음이 성립한다.

$$N(A^t) = R(A)^\perp \quad \& \quad R(A^t) = N(A)^\perp$$

$$\dim(R(A)) = \dim(R(A^t))$$

(5) 선형사상 $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ 에 대해서 다음 동치관계가 성립한다.

- ① T 는 일대일(단사)이다. ② T 는 전사이다.
- ③ T^* 는 일대일(단사)이다. ④ T^* 는 전사이다.

개념 및 내용

예제 1.7 $\mathbb{R}^4$ 의 두 벡터 $\mathbf{u} = (-1, 1, 1, 1)$ 과 $\mathbf{v} = (2, -1, -1, 1)$ 에 의해서 생성된 부분공간(subspace) $W = \text{Sp}\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ 의 직교여공간(orthogonal complement) $W^\perp$ 의 기저(basis)를 구하여라.

예제 1.8 V 가 내적공간이고 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ 일 때 다음이 성립함을 보여라.

$$(1) \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 + \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2$$

$$(2) \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \frac{1}{4} \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 - \frac{1}{4} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2$$

예제 1.9 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ 의 노름에 대해서 다음 관계가 성립함을 보여라.

$$(1) \|\mathbf{x}\|_\infty \leq \|\mathbf{x}\|_1 \leq n \|\mathbf{x}\|_\infty$$

$$(2) \|\mathbf{x}\|_\infty \leq \|\mathbf{x}\|_2 \leq \sqrt{n} \|\mathbf{x}\|_\infty$$

$$(3) \|\mathbf{x}\|_2 \leq \|\mathbf{x}\|_1 \leq \sqrt{n} \|\mathbf{x}\|_2$$

예제 1.10 유클리드 내적공간 $\mathbb{R}^3$ 에서 $\mathbf{x} = (1, 0, -1)$, $\mathbf{y} = (1, -1, 1)$ 와 직교하는 단위벡터를 구하여라.

예제 1.11 다음 각 벡터공간 V 의 부분공간 W 의 직교여공간 $W^\perp$ 를 구하여라.

- (1) $V = \mathbb{R}^3$, $W = \{(x, y, z) \in V \mid 2x - y + 3z = 0\}$
- (2) $V = \mathbb{R}^3$, $W = \{(x, y, z) \in V \mid x + y + z = 0, x + y - z = 0\}$
- (3) $V = \mathbb{R}^4$, $W = \text{Sp}\langle (1, -2, 0, 1), (2, 1, 0, 2) \rangle$

예제 1.12 $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ 를 아래와 같이 정의된 선형사상이라 하자.

$$T(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 + x_2, 3x_1 - 4x_3, 2x_1 - 3x_2 - 3x_3)$$

- (1) 대응하는 수반사상 T^* 를 구하여라.
- (2) $\mathbb{R}^3$ 의 표준기저에 대한 T 와 T^* 의 행렬을 구하고 이를 비교하여 상관관계를 보여라.
- (3) $N(T)$, $R(T)$, $N(T^*)$, $R(T^*)$ 를 구하여라.

예제 1.13 다음 주어진 각 행렬 A 에 대해서 $N(A)$, $R(A)$, $N(A^t)$, $R(A^t)$ 의 기저를 구하고

$N(A) = R(A^t)^\perp$ 와 $N(A^t) = R(A)^\perp$ 가 성립함을 확인하여라.

$$(1) A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(2) A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

예제 1.14 세 벡터 $v_1 = (1, -2, 1)$, $v_2 = (1, -1, 3)$, $v_3 = (1, 1, 7)$ 으로 생성되는 $\mathbb{R}^3$ 의 부분공간 W 의 직교여공간 $W^\perp$ 의 차원은?(국민대 2010)

① 0

② 1

③ 2

④ 3

예제 1.15 실수 성분을 갖는 7×10 행렬 A 의 열공간과 행공간을 각각 R_A , C_A 라 하자. $\dim(R_A) = 4$ 일 때, $\dim(C_A^\perp)$ 을 구하면? (단, $C_A^\perp$ 는 C_A 의 모든 원소에 직교하는 벡터공간을 나타내고, 임의의 부분공간 W 에 대하여 $\dim(W)$ 는 W 의 차원을 나타낸다.)(중앙대 2009)

① 3

② 4

③ 6

④ 7

예제 1.16 $U = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid y + z + w = 0\}$ 일 때, U 의 직교여공간(orthogonal complement) $U^\perp$ 의 기저(basis)가 될 수 있는 것은?(중앙대 2013)

- ① $(1, -2, 1, 1)$ ② $(0, 1, 1, 1)$ ③ $(0, -1, 1, 1)$ ④ $(1, 1, -1, 1)$

예제 1.17 3개의 벡터 $(1, 0, -1, 1)$, $(0, 0, -1, 1)$, $(2, -1, 2, 0)$ 들과 수직인 $\vec{0}$ 이 아닌 벡터 $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ 에 대한 설명 중 옳은 것은?(한양대 2004)

- ① v_1 는 임의의 실수이다. ② $v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = 0$ 이다.
 ③ $v_1^2 - v_2^2 + v_3^2 - v_4^2 = 0$ 이다. ④ $v_3^2 - v_4^2 = 0$ 이다.

5.2 직교성과 그람-슈미트 직교화 과정

1. 직교집합 및 정규직교집합(orthogonal set and orthonormal set)

일반적으로 임의의 기저에 의해 결정되는 좌표축은 서로 수직을 이루지 않는다. 벡터의 합이나 스칼라 곱과 같은 단순한 문제에서는 좌표축이 서로 수직을 이루는 문제가 그리 중요하지 않을 수 있다. 그러나 내적이 관련된 문제에서는 좌표축이 서로 수직을 이루도록 설정하면 계산이 한결 간결하고 수월해지는 효과를 누릴 수 있다.

(1) 직교집합(orthogonal set)

S 가 내적공간 V 의 부분집합이고 다음 조건을 만족할 때 S 를 **직교집합**(orthogonal set)이라고 정의한다.

$$S: \text{직교집합} \Leftrightarrow \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0, \forall \mathbf{u} \neq \mathbf{v} \in S$$

(2) 정규직교집합(orthonormal set)

S 가 내적공간 V 의 부분집합이고 다음 조건을 만족할 때 S 를 **정규직교집합**(orthonormal set)이라고 정의한다.

$$S: \text{정규직교집합} \Leftrightarrow S: \text{직교집합} \ \& \ \| \mathbf{v} \| = 1, \forall \mathbf{v} \in S$$

(3) 직교기저(orthogonal basis)

$S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ 가 내적공간 V 의 기저(basis)이고 다음 조건을 만족할 때 S 를 **직교기저**(orthogonal basis)이라고 정의한다.

$$S: \text{직교기저} \Leftrightarrow \langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle = 0, \forall i \neq j$$

(4) 정규직교기저(orthonormal basis)

$S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ 가 내적공간 V 의 기저(basis)이고 다음 조건을 만족할 때 S 를 **정규직교기저**(orthonormal basis)이라고 정의한다.

$$S: \text{정규직교기저} \Leftrightarrow \langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle = \delta_{ij} := \begin{cases} 1, & (i = j) \\ 0, & (i \neq j) \end{cases}$$

[참고] ① 유클리드 내적공간 $\mathbb{R}^n$ 의 표준기저 $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$ 는 정규직교기저의 좋은 예이다.

② 직교집합(orthogonal set) 및 직교기저(orthogonal basis)은 벡터의 크기를 1로 조정함으로써 정규직교집합(orthonormal set) 및 정규직교기저(orthonormal basis)로 쉽게 전환할 수 있다.

2. 직교성과 연관된 주요 내용 및 정리

(1) $S = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ 를 내적공간 V 의 정규직교집합이라 하자.

$$\textcircled{1} \quad x = \sum_{j=1}^n c_j e_j \Rightarrow c_k = \langle x, e_k \rangle, \quad \forall k = 1, 2, \dots, n.$$

$\textcircled{2} \quad S$ 는 일차독립이다.

(2) 【내적공간의 직합: $V = W \oplus W^\perp$ 】

V 가 내적공간이고 $S = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ 를 V 내에서 정규직교집합이라 하자. $W = Sp\langle S \rangle$ 라 하면 각 벡터 $v \in V$ 는

$$v = \hat{v} + \tilde{v}, \quad (\hat{v} \in W, \tilde{v} \in W^\perp)$$

으로 유일하게 표현할 수 있다. 이때, $\hat{v} = \sum_{j=1}^n \langle v, e_j \rangle e_j$ 이다.

(3) 내적공간 V 의 임의의 정규직교집합은 V 의 정규직교기저로 확장될 수 있다. 또한 영이 아닌 모든 내적공간은 정규직교기저(orthonormal basis)를 갖는다.

(4) 유한차원 내적공간 V & $W < V$ 이면 다음이 성립한다.

$$\dim(W) + \dim(W^\perp) = \dim(V)$$

(5) 내적공간 V & $W < V$ 이면 다음이 성립한다.

$$W^{\perp\perp} = W$$

3. 그람-슈미트 직교화 과정(Gram-Schmidt orthogonalization process)

내적공간에 대한 정규직교기저(orthonormal basis)가 항상 존재한다. 따라서 유한차원의 내적공간에서 주어진 임의의 기저(basis)를 가지고 정규직교기저(orthonormal basis)를 생성하는 방법이 **그람-슈미트 직교화 과정**(Gram-Schmidt orthogonalization process)이다.

【그람-슈미트직교화 과정: Gram-Schmidt orthogonalization process】

V 를 n 차원 내적공간이라 하자. V 의 임의의 기저 $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ 으로부터 다음과 같이 생성된 벡터 $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ 은 V 의 정규직교기저(orthonormal basis)를 이룬다.

$$(\text{step1}) \quad u_1 = v_1 \quad ; \quad e_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|}$$

$$(\text{step2}) \quad u_k = v_k - \sum_{j=1}^{k-1} \langle v_k, e_j \rangle e_j \quad ; \quad e_k = \frac{u_k}{\|u_k\|}, \quad k = 2, 3, \dots, n$$

[참고] ① $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$: 직교기저 & ② $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$: 정규직교기저.

4. 하우스홀더 변환(Householder transformation)

(1) 정의

그람-슈미트 직교화 과정(Gram-Schmidt orthogonalization process)은 아이디어가 단순하고 이해하기 쉽지만 계산량이 너무 많아서 큰 시스템의 분해를 위한 계산도구로서는 다소 적합하지 않은 면이 있다. 따라서 각 과정에서 계수(rank)가 1인 복사연산자(reflector operator)를 시스템의 분해를 위한 직교변환으로 활용할 수 있다.

벡터 $\vec{u} \neq \vec{0} \in \mathbb{R}^n$ 에 대해서 하우스홀더 변환(Householder transformation) P 를 다음과 같이 정의한다.

$$P = I_n - 2 \frac{\vec{u} \vec{u}^t}{\|\vec{u}\|^2}$$

(2) 주요 성질 및 특징

하우스홀더 변환(Householder transformation)의 주요 특징은 다음과 같다.

- ① P 는 단위행렬 I_n 의 계수(rank)가 1인 변형을 나타낸다.
- ② $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ 에 대하여 $\hat{\vec{x}} = P\vec{x}$ 는 초평면 $(Sp\langle \vec{u} \rangle)^\perp$ 에 대한 $\vec{x}$ 의 복사(reflector)를 나타낸다. 이러한 복사(reflector)를 하우스홀더 복사(Householder reflector)라고 한다.
- ③ P 는 직교행렬(orthogonal matrix)이고 $P^t = P$ 이다.
- ④ $\vec{x} \neq \vec{0} \in \mathbb{R}^n$ 에 대해 $\vec{u} = \vec{x} \pm \|\vec{x}\| \vec{e}_1$ 을 택하면 복사 $P = I_n - 2 \frac{\vec{u} \vec{u}^t}{\|\vec{u}\|^2}$ 에 대해 $P\vec{x} = \mp \|\vec{x}\| \vec{e}_1$ 이다.

개념 및 내용

예제 2.1 유클리드 내적공간 $\mathbb{R}^3$ 에 있는 벡터 $\mathbf{v}_1 = (0, 1, 0)$, $\mathbf{v}_2 = (1, 0, 1)$, $\mathbf{v}_3 = (-1, 0, 1)$ 은 서로 직교함을 보이고 이를 정규직교집합으로 바꾸어라.

예제 2.2 행렬 $A \in M_{m,n}$ 에 대하여 제차방정식 $A\mathbf{x} = \vec{0}$ 의 해공간의 차원을 구하여라.

예제 2.3 벡터 $\mathbf{v}_1 = (1, 0, 0, -1)$, $\mathbf{v}_2 = (0, -1, 1, 0)$ 을 포함하는 $\mathbb{R}^4$ 의 정규직교기저를 구하여라.

예제 2.4 W 를 두 벡터 $\mathbf{v}_1 = \left(\frac{4}{5}, 0, -\frac{3}{5}\right)$, $\mathbf{v}_2 = (0, 1, 0)$ 으로 생성된 $\mathbb{R}^3$ 의 부분공간이라고 하자.

- (1) W 가 이루는 평면을 구하여라.
- (2) $\mathbf{w} = (1, 2, 3) \in \mathbb{R}^3$ 를 W 와 $W^\perp$ 의 합으로 나타내어라.

예제 2.5 유클리드 내적공간 $\mathbb{R}^3$ 에서 벡터 $\mathbf{v}_1 = (1, 1, 1)$, $\mathbf{v}_2 = (0, 1, 1)$, $\mathbf{v}_3 = (0, 0, 1)$ 에 의해 생성되는 정규직교기저를 구하여라.

예제 2.6 유클리드 내적공간에서 다음 주어진 벡터에 의해서 생성되는 벡터공간에 대한 정규직교기저(orthonormal basis)를 구하여라.

$$(1) \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$(2) \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

예제 2.7 $\mathbf{v}_1 = (0, 1, -2)$, $\mathbf{v}_2 = (1, 0, 2) \in \mathbb{R}^3$ 에 의해서 생성되는 부분공간을 $W = \text{Sp}\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle$ 라 하자.

(1) $W^\perp$ 의 기저를 구하여라.

(2) W 와 $W^\perp$ 의 기하학적 의미를 구하여라.

(3) $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ 를 $W^\perp$ 위로 정사영시키는 선형사상 P 와 표준기저에 대응하는 행렬을 구하여라.

예제 2.8 $V = C([-1, 1])$ 에서 $\langle f, g \rangle := \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx$ 로 정의할 때 다음 물음에 답하여라.

(1) $\langle f, g \rangle$ 가 V 상에서 내적이 됨을 보여라.

(2) P_3 의 표준기저 $B = \{1, x, x^2, x^3\}$ 를 **그람-슈미트 직교화 과정**을 적용하여 정규직교기저로 바꾸어라.

예제 2.9 벡터 $\mathbf{u} = (-2, 1, 3)$ 을 실공간 $\mathbb{R}^3$ 의 직교기저 $B = \{(1, 0, 1), (1, 1, -1), (-1, 2, 1)\}$ 을 정규화(normalization)한 정규직교기저(orthonormal basis)의 일차결합으로 나타낼 때 계수들의 곱은?(한양대 2013)

① $\frac{14}{3}$

② $-\frac{14}{3}$

③ $\frac{7}{18}$

④ $-\frac{7}{18}$

예제 2.10 3 차원공간에서 세 개의 벡터 $\vec{\mathbf{v}}_1 = (2, 1, 0)$, $\vec{\mathbf{v}}_2 = (0, 2, 2)$, $\vec{\mathbf{v}}_3 = (0, 0, 3)$ 로 이루어진 기저 $\{\vec{\mathbf{v}}_1, \vec{\mathbf{v}}_2, \vec{\mathbf{v}}_3\}$ 로부터 그램-슈미트 직교화과정(Gram-Schmidt Orthogonalization Process)을 거쳐 만들어진 직교기저 $\{\vec{\mathbf{w}}_1, \vec{\mathbf{w}}_2, \vec{\mathbf{w}}_3\}$ 에 대하여 $|\vec{\mathbf{w}}_1||\vec{\mathbf{w}}_2||\vec{\mathbf{w}}_3|$ 의 값은?(성균관대 2012)
(단, $|\vec{\mathbf{w}}|$ 은 벡터 $\vec{\mathbf{w}}$ 의 길이이다.)

① 8

② 9

③ 10

④ 11

⑤ 12

5.3 최소제곱문제(Least squares problem)

1. 최소제곱문제의 필요성

일반적으로 현실에서 만나는 문제 상황들은 학문적 연구의 대상이 되는 이론들보다 더 복잡하고 또 실험적 오차(error)를 내포하고 있으므로 설정된 수학적 모델 안에서 해를 가지지 않을 때가 많다. 이런 경우에 생각해 보게 되는 것은 구하려고 하는 해에 가장 가까운 어떤 값, 즉 근사해(approximation solution)를 얻기 위해서 노력하게 된다. 이때 중요한 것은 해(정확한 해, exact solution)에 가장 가깝다는 말의 의미를 명확히 규정하는 일이고, 다음으로는 그러한 근사해를 어떻게 효율적으로 계산해 낼 수 있는가 하는 문제이다. 어떠한 것에 “가장 가깝다”는 개념이 벡터공간에 적용되기 위해서는 각 벡터에 어떠한 종류의 척도를 주어야 하고 이것은 곧 필연적으로 내적공간으로 귀결되게 된다. 이러한 문제와 관련하여 **최소제곱문제**(Least Squares Problem)는 수학적으로 매우 정밀하게 고안된 도구로, 주어진 몇 개의 점을 지나는 가장 근사한 직선이나 포물선을 구하는 문제라든가 또는 과거의 실험 데이터를 바탕으로 한 미래 상황에 대한 예측의 문제, 표준형을 가지는 어떤 제품들의 불량성 정도를 판정하는 문제 등 그 응용범위가 대단히 넓다.

2. 최소제곱문제(Least Squares Problem)

최소제곱문제(Least Squares Problem)는 일반적으로 과결정인 연립방정식으로 형식화 할 수 있다. **과결정시스템**(over-determined system of linear equations)은 방정식의 개수가 미지수의 개수보다 많은 연립일차방정식을 뜻한다.

$A \in M_{m,n}$ ($m > n$) 이고 $b \in M_{m,1}$ 일 때 아래와 같은 과결정시스템

$$Ax = b$$

의 해를 구하는 문제를 생각해 보자. 일반적으로 과결정시스템은 대체로 해를 갖지 않는다. 따라서, Ax 와 b 의 차 $b - Ax$ 를 가장 작게, 즉 $\|b - Ax\|$ 를 최소화하는 벡터 x^* 를 구하는 문제를 **최소제곱문제**(Least Squares Problem, 간단히 LSP)라고 한다. 이것을 정리하면 아래와 같다.

$$(LSP) \quad \min_{x \in \mathbb{R}^n} \|b - Ax\| = \|b - Ax^*\| \text{를 만족하는 } x^* \in \mathbb{R}^n \text{을 구하라.}$$

[참고] ① $r(x) = b - Ax$ 를 x 의 **잉여**(residual)라고 한다.

② 최소제곱문제(LSP)의 해 x^* 를 **최소제곱해**(least squares solution)라고 하고, 이러한 방식을 데이터 해석에 대한 **최소제곱방법**(least squares method)이라고 한다.

③ 과결정시스템에 대한 최소제곱해는 유일하지 않을 수 있다.

3. 최소제곱문제와 관련된 주요 내용

(1) 최소제곱문제(LSP)에 대해 해 $\mathbf{x}^*$ 가 존재하면 $\mathbf{x}^*$ 는 **정규방정식**(normal equation)

$$A^t A \mathbf{x} = A^t \mathbf{b}$$

를 만족한다.

(2) $A \in M_{m,n}$ 이고 정규방정식(normal equation)

$$A^t A \mathbf{x} = A^t \mathbf{b}$$

이 유일한 해를 가질 필요충분조건은 $\text{rank}(A) = n$ 이다. 즉 $A^t A$ 가 가역행렬(invertible matrix)이고 최소제곱문제(LSP)의 해는 $\mathbf{x}^* = (A^t A)^{-1} A^t \mathbf{b}$ 이다.

(3) $A \in M_{m,n}$ 에서 $\text{rank}(A) < n$ 이면 과결정시스템에 대한 최소제곱해는 유일하지 않다.

[참고] 최소제곱문제(LSP)에서 $A^t A \mathbf{x} = A^t \mathbf{b}$ 를 $A \mathbf{x} = \mathbf{b}$ 의 **정규방정식**(normal equation)이라고 한다.

개념 및 내용

예제 3.1 아래 데이터에 대해서 최소제곱방법(Least squares method)을 이용한 최적직선을 구하여라.

x_j	-1	0	1	1	2
y_j	-3	-1	2	3	2

예제 3.2 아래 데이터에 대한 2 차(함수) 최소제곱해를 구하여라.

x_j	-1	0	1	1	2
y_j	-3	-1	2	3	2

예제 3.3 아래 과결정시스템에 대한 최소제곱해를 구하여라.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ -x_1 + x_2 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 = 3 \end{cases}$$

예제 3.4 다음 연립방정식의 최소제곱 해(least squares solution)를 구하라. (한양대 2007)

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 3 \\ 2x_1 + x_2 = 1 \\ -x_1 + 2x_2 = 2 \end{cases}$$

예제 3.5 공간벡터 $\vec{a} = (1, 0, -1)$, $\vec{b} = (1, 1, 1)$, $\vec{c} = (1, 2, 0)$ 에 대하여 벡터의 크기 $|\vec{c} - s\vec{a} - t\vec{b}|$ 가 최소가 되도록 하는 실수 s, t 의 합을 구하면? (세종대 2013)

① $\frac{1}{2}$

② 1

③ $\frac{3}{2}$

④ 2

예제 3.6 벡터 $\mathbf{v}_1 = (1, 0, -1, -1)$, $\mathbf{v}_2 = (0, 2, 1, 2)$ 로 생성되는 $\mathbb{R}^4$ 의 부분공간을 W 라 하고, 벡터 $(1, 1, 1, -1)$ 에 가장 가까운 W 에 있는 벡터를 $\mathbf{v} = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ 라 하자. $\mathbf{v}$ 의 성분의 합 $a_1 + a_2 + a_3 + a_4$ 은? (중앙대 2011)

① 1

② 2

③ 3

④ 4

PART

+

-

×

÷

06

고윳값과 대각화 (Eigenvalue & Diagonalization)

6.1 고윳값과 고유벡터(Eigenvalue and Eigenvector)

6.2 행렬의 대각화(Diagonalization of Matrix)

6.3 이차형식(Quadratic Form)

6.4 양의 정부호 행렬과 쉐레스키 분해
(Positive Definite Matrix & Cholesky Decomposition)

6.1 고윳값과 고유벡터(Eigenvalue and Eigenvector)

1. 고윳값과 고유벡터

(1) 개념 설명 및 정의

n 차 정방행렬 $A \in M_n$ 와 n 차원 벡터 $\mathbf{x} (\neq \vec{0}) \in \mathbb{R}^n$, 스칼라 λ 에 대하여

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$$

가 성립할 때 λ 를 행렬 A 의 **고윳값**(eigenvalue)이라 하고, $\mathbf{x}$ (또는 $\mathbf{x}_\lambda$)를 λ 에 대응하는 행렬 A 의 **고유벡터**(eigenvector)라고 한다.

[참고] ① 고윳값 λ 는 복소수(complex number)가 될 수도 있다.

② $E_\lambda := \{\mathbf{x}_\lambda \mid A\mathbf{x}_\lambda = \lambda\mathbf{x}_\lambda\}$: 고윳값 λ 에 대응하는 **고유공간**(eigenspace)

(2) 특성다항식과 특성방정식

방정식 $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ 의 해 $\mathbf{x} (\neq \vec{0}) \in \mathbb{R}^n$ 를 구하는 문제는 방정식 $(\lambda I_n - A)\mathbf{x} = \vec{0}$ 의 자명하지 않은 해 $\mathbf{x}$ 를 구하는 것과 같다. 따라서, 고윳값 λ 를 구하기 위한 필요충분조건은 $\det(\lambda I_n - A) = 0$ 을 만족하는 λ 에 대한 n 차 방정식을 푸는 것과 같다.

① 특성다항식(characteristic polynomial)

$$\begin{aligned} p(\lambda) = \det(\lambda I_n - A) &= \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix} \\ &= (\lambda - a_{11})(\lambda - a_{22}) \cdots (\lambda - a_{nn}) + (\lambda \text{ 에 관한 } n-2 \text{ 차 이하의 항}) \end{aligned}$$

② 특성방정식(characteristic equation)

$$p(\lambda) := \det(\lambda I_n - A) = 0$$

[참고] ① 대수학의 기본정리에 의하면 n 차 다항식은 복소수체에서 중근을 고려하면 n 개의 근을 갖는다. 따라서 n 차 정방행렬은 중근까지 고려하면 n 개의 고윳값을 갖는다. 그러나 실수인 고윳값으로 제한하면 고윳값이 존재하지 않을 수도 있다.

② 고윳값이나 고유벡터는 각각 $\det(A - \lambda I_n) = 0$ 과 $(A - \lambda I_n)\mathbf{x} = \vec{0}$ 을 이용해서 구할 수도 있다.

2. 고윳값과 고유벡터를 찾는 법

n 차 정방행렬 $A \in M_n$ 의 고윳값 λ 와 고유벡터 $\mathbf{x}_\lambda$ 를 다음과 같은 방법으로 찾는다.

【고윳값과 고유벡터 찾는 법】

[step1] 고윳값 λ :

(풀이) $p(\lambda) := \det(\lambda I_n - A) = 0 \Rightarrow \therefore \lambda = ?$

[step2] 고윳값 λ 에 대한 고유벡터 $\mathbf{x}_\lambda$:

(풀이) [step1]에서 구한 고윳값 λ 를 $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ 에 대입.

$\Rightarrow [A - \lambda I_n : \vec{0}]$

$\Rightarrow \therefore \mathbf{x}_\lambda = ?$ ($\because$ 가우스 소거법 또는 가우스-조르당 소거법을 이용)

[참고] ① 고윳값들의 모임을 행렬 A 의 스펙트럼(spectrum)이라고 다음과 같이 나타낸다.

$$\lambda(A) := \{\lambda \mid A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}\}$$

② 행렬 A 의 고윳값의 절대값 중 가장 큰 값을 A 의 스펙트럼 반경(spectrum radius)이라고 다음과 같이 나타낸다.

$$\rho(A) := \max\{|\lambda| \mid \lambda \in \lambda(A)\}$$

③ $M_\lambda :=$ 고윳값 λ 의 근의 중복도를 대수적 중복도(algebraic multiplicity)라고 정의한다.

즉, 특성 방정식 $p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{n_1}(\lambda - \lambda_2)^{n_2} \cdots (\lambda - \lambda_k)^{n_k}$ 일 때, 다음이 성립한다.

$$\textcircled{a} M_{\lambda_j} = n_j \quad (j = 1, 2, \dots, k) \quad (\text{단, } \sum_{j=1}^k n_j = n)$$

$$\textcircled{b} m_{\lambda_j} \leq M_{\lambda_j} \quad (j = 1, 2, \dots, k) \quad (\text{즉, 기하적 중복도} \leq \text{대수적 중복도})$$

④ $m_\lambda := \dim(E_\lambda)$ 를 고윳값 λ 의 기하적 중복도(geometric multiplicity)라고 정의한다.

⑤ $\Delta_\lambda := M_\lambda - m_\lambda$: 고윳값 λ 의 부족지수(defect)라고 정의한다.

3. 고윳값과 고유벡터의 기본성질

(1) n 차 정방행렬 $A \in M_n$ 에 대하여 다음은 서로 동치관계이다.

- ① λ 는 A 의 고윳값이다.
- ② $(\lambda I_n - A)\mathbf{x} = \vec{0}$ 은 자명하지 않은 해를 갖는다.
- ③ $N(\lambda I_n - A) \neq \{\vec{0}\}$
- ④ λ 는 특성방정식 $p(\lambda) := \det(\lambda I_n - A) = 0$ 의 근이다.

(2) $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 이 $A := [a_{ij}] \in M_n$ 의 고윳값일 때 다음이 성립한다.

- ① $tr(A) := \sum_{i=1}^n a_{ii} = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n$
- ② $\det(A) = p(0) = \prod_{i=1}^n \lambda_i = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \dots \cdot \lambda_n$

(3) n 차 정방행렬 $A \in M_n$ 에 대하여, λ 가 고윳값이고 $\mathbf{x}_\lambda$ 는 λ 에 대응하는 고유벡터일 때, 다음이 성립한다.

- ① $\forall k \in \mathbb{N}, A^k$ 의 고윳값은 λ^k 이고, λ^k 에 대응하는 A^k 의 고유벡터는 $\mathbf{x}_\lambda$ 이다.
- ② α 가 스칼라일 때, (αA) 의 고윳값은 $\alpha\lambda$ 이고, $\alpha\lambda$ 에 대응하는 (αA) 의 고유벡터는 $\mathbf{x}_\lambda$ 이다.
- ③ A : 가역행렬 $\Rightarrow A^{-1}$ 의 고윳값: $\frac{1}{\lambda}$ & A^{-1} 의 고유벡터: $\mathbf{x}_\lambda$
- ④ A 와 A^t 의 고윳값은 같다. 그러나, 고유공간이 같은 것은 아니다.

개념 및 내용

예제 1.1 다음 주어진 행렬 A 의 (i)고윳값(eigenvalue)과 그에 대응하는 (ii)고유벡터(eigenvector), (iii)고유공간(eigenspace) 및 (iv)대수적중복도(algebraic multiplicity)와 기하적중복도(geometric multiplicity)를 구하여라.

$$(1) A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$(2) A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$(3) A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(4) A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & -4 & 5 \end{bmatrix}$$

예제 1.2 아래 주어진 행렬 A 의 스펙트럼(spectrum) $\lambda(A)$ 와 고유공간 E_λ 를 구하여라.

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -6 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

예제 1.3 행렬 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ 의 스펙트럼 $\lambda(A)$, 스펙트럼 반경 $\rho(A)$ 및 고유공간 E_λ 를 구하여라.

예제 1.4 A 는 2×2 행렬이고 $p(\lambda) = \lambda^2 + b\lambda + c$ 는 행렬 A 의 특성다항식(characteristic polynomial)이다. 이 때 $b = -tr(A)$, $c = \det(A)$ 임을 보여라.

예제 1.5 A 는 $\text{tr}(A) = 8$ 이고 $\det(A) = 12$ 인 2 차 정방행렬일 때 A 의 고윳값을 구하여라.

예제 1.6 $A^2 = A$ 인 n 차 정사각행렬(또는 정방행렬)을 **멱등행렬**(idempotent matrix)이라고 한다. 멱등행렬의 고윳값이 0 또는 1 임을 보여라.

예제 1.7 어떤 양의 정수 k 에 대하여 $A^k = O$ 를 만족하는 n 차 정방행렬 A 를 **거듭제곱이 영인 행렬**(또는 멱등영행렬, nilpotent matrix)이라고 한다. 이 행렬의 고윳값은 모두 0 임을 보여라.

예제 1.8 $A \in M_n$ 인 행렬과 스칼라 α 에 대해 $B := A - \alpha I_n$ 라고 하자. A 의 고윳값이 λ 이고 이에 대응하는 고유벡터가 $\mathbf{x}_\lambda$ 일 때 B 의 고윳값과 고유벡터를 구하여라.

예제 1.9 A 가 $n \times n$ 행렬 일 때 A 와 A' 는 동일한 고윳값을 가짐을 보여라. 또한 고유벡터도 반드시 같은가?

예제 1.10 $Q \in M_n$ 는 직교행렬(orthogonal matrix)이다.

- (1) λ 가 Q 의 고윳값이면 $|\lambda| = 1$ 임을 보여라.
- (2) $|\det(Q)| = 1$ 임을 보여라.

예제 1.11 $A, B \in M_n$ 일 때 AB 와 BA 는 같은 고윳값을 가짐을 보여라.

예제 1.12 n 차 정방행렬 $A \in M_n$ 와 A 의 대각합 $tr(A)$ 에 대하여 다음을 보여라.

- (1) $tr(A^t) = tr(A)$
- (2) $A, B \in M_n$ 이면 $tr(AB) = tr(BA)$ 이다.
- (3) $A = PBP^{-1}$ 이면 $tr(A) = tr(B)$ 임을 보여라.

예제 1.13 행렬 $A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 2 \\ -4 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ 에 대해 각각 다음 행렬의 고윳값과 고유공간의 기저를 구하고 비교하여라.

(1) A

(2) A^{-1}

(3) $A - 2I_3$

(4) $A - 3I_3$

예제 1.14 선형변환 $T: P_2 \rightarrow P_2$ 를 아래와 같이 정의한다. 다음 물음에 답하여라. (단, P_2 는 이차다항식의 집합)

$$T(p(x)) = p(1 + 2x)$$

(1) 변환행렬(또는 표준행렬) A 를 구하여라.

(2) A 의 스펙트럼(spectrum) $\lambda(A)$ 와 스펙트럼 반경(spectrum radius) $\rho(A)$ 를 구하여라.

(3) 고윳값 λ 에 고유공간 E_λ 를 구하여라.

예제 1.15 아래 주어진 행렬의 곱을 고윳값과 고유벡터를 이용하여 구하여라.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^{2017} \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

예제 1.16 행렬 A 와 B 가 각각 고윳값 λ 와 μ 를 가지는 $n \times n$ 행렬일 때 다음 물음에 답하여라.

(1) $\lambda + \mu$ 가 $A + B$ 의 고윳값인가?

(2) $\lambda\mu$ 가 AB 의 고윳값인가?

(3) λ 와 μ 가 같은 고유벡터에 대응할 때, $\lambda + \mu$ 는 $A + B$ 의 고윳값이고 $\lambda\mu$ 는 AB 의 고윳값임을 보여라.

예제 1.17 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$, ($1 \leq k \leq n$) 를 $n \times n$ 행렬 A 의 서로 다른 고윳값이라 하고 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k$ 를 각각 이에 대응하는 고유벡터라고 하면 $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k\}$ 는 일차독립임을 보여라.

예제 1.18 행렬 $A = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$ 의 고윳값을 λ_1, λ_2 라고 할 때, $|\lambda_1 + \lambda_2|$ 의 값은?(홍익대 2010)

① 5

② 6

③ 7

④ 8

예제 1.19 행렬 $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ 의 고윳값(eigenvalue)들의 합은?(한양대 202)

① 0

② 2

③ 4

④ 6

예제 1.20 연립방정식 $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ 가 $(0, 0)$ 이 아닌 해를 가지기 위한 k 의 모든 값의 합을 구하시오.(이화여대 2013)

예제 1.21 I_4 를 4×4 단위행렬이라 하고,

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad P(\lambda) = \det(\lambda I_4 - B)$$

이라 할 때, 다항식 P 의 모든 근의 합을 구하면?(중앙대 2008)

① 0

② 1

③ 4

④ 12

예제 1.22 행렬 $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & a \end{bmatrix}$ 의 고윳값이 5와 -2 일 때, a 는 얼마인가?(한성대 2013)

- ① 2 ② 4 ③ 5 ④ 8

예제 1.23 행렬 A 가 다음과 같이 주어졌고, I_3 는 단위행렬이라고 하자.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 6 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

이 때 $B = A - \lambda I_3$ 라고 할 때, B 의 행렬식이 0 이 되게 하는 모든 λ 들을 곱한 값은?(중앙대 2004)

- ① -13 ② 16 ③ 22 ④ -26

예제 1.24 행렬 $A = \begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & b \end{bmatrix}$ 의 고윳값의 합과 곱이 각각 3, -4 일 때, $a^2 + b$ 의 값을 구하시오.

- ① 3 ② 5 ③ -1 ④ 4

예제 1.25 특성다항식 $p(\lambda) = \lambda^3 - 4\lambda^2 - 4\lambda + 16$ 인 3×3 행렬 A 의 행렬식의 값은?(국민대 2011)

- ① -16 ② -8 ③ 8 ④ 16

예제 1.26 행렬 $A = \begin{bmatrix} -3 & 5 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$ 가 주어질 때 행렬 A^{10} 의 트레이스(trace) $tr(A^{10})$ 의 값은?(한양대 2013)

- ① $\frac{1}{3}(2^{10} + 1)$ ② $3(2^{10} + 1)$ ③ $2^{10} + 1$ ④ $2^{10} - 1$

예제 1.27 $A = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ 일 때, A^{30} 의 대각성분의 합을 구하면?(중앙대 자연 2012)

- ① $-2^{32} + 6$ ② $-2^{30} + 1$ ③ $2^{30} + 1$ ④ $2^{32} - 4$

예제 1.28 다음 중 고윳값의 합이 가장 큰 행렬은?(국민대 2013)

- ① $\begin{bmatrix} 1 & 10 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ ② $\begin{bmatrix} 1 & 10 \\ 10 & -1 \end{bmatrix}$
 ③ $\begin{bmatrix} 0.3 & 0.7 \\ 0.7 & 0.3 \end{bmatrix}^{10}$ ④ $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^{-10}$

예제 1.29 행렬 $A \in M_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ 의 고윳값이 $-2, 1, 2$ 일 때 $\det(2A^2)$ 의 값을 구하면?(광운대 2013) [4점]

- ① -124 ② -64 ③ 128 ④ 144 ⑤ 256

예제 1.30 행렬 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ 이 주어졌을 때, 다음 중 가장 큰 값은?(한양대 예리카 2013)

- ① $\det(2A)$ ② $\text{tr}(2A)$ ③ $\det(A^2)$ ④ $\text{tr}(A^2)$

예제 1.31 다음 중 행렬 $A = \begin{bmatrix} 6 & -11 & 6 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ 의 역행렬 A^{-1} 의 고윳값은?(중앙대 2005)

- ① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{3}{2}$ ③ 2 ④ 3

예제 1.32 $A = \begin{bmatrix} 6 & -11 & 6 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ 일 때, 역행렬 A^{-1} 의 고유벡터(eigenvector)가 아닌 것은?(중앙대 2008)

- ① $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ ② $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ ③ $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ④ $\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

예제 1.33 지수가 8 인 멱영행렬(idempotent matrix) $A \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ 에 대한 다음 설명 중 옳은 것을 모두 고르면? (단, $\mathbb{R}$ 은 실수 전체의 집합이다.)(광운대 2015)

- ① A 의 모든 고윳값들의 합은 0 이다. ② A 는 8 개의 서로 다른 고윳값을 갖는다.
 ③ $n \leq 7$ 인 자연수에 대하여 A^n 는 영행렬이 아니다.

- ① ① ② ② ③ ③ ④ ①, ③ ⑤ ②, ③

예제 1.34 λ 를 $n \times n$ 행렬 A 의 고윳값이라 하고, $\mathbf{x}$ 가 λ 에 대응하는 고유벡터일 때 다음 중 옳지 않은 것은? (성균관대 2014)

- ① λ 는 A^T 의 고윳값이다.
- ② $\mathbf{x}$ 는 λ^5 에 대응하는 A^5 의 고유벡터이다.
- ③ A 가 가역행렬이면 $1/\lambda$ 은 A^{-1} 의 고윳값이다.
- ④ $\{\mathbf{x}, A\mathbf{x}\}$ 에 의해서 생성된 $\mathbb{R}^n$ 의 부분공간의 차원은 2이다.
- ⑤ $\text{rank}(A - \lambda I_n) = k$ 이면 λ 에 대응하는 A 의 고유공간의 차원은 $n - k$ 이다. (I_n 은 $n \times n$ 단위행렬)

예제 1.35 차원이 유한한 벡터 공간 V 에 정의된 선형함수 $T: V \rightarrow V$ 의 고윳값 λ 에 해당하는 고유공간을 E_λ 라 하자. 다음 중 옳은 내용은 몇 개인가? (중앙대 자연 2016)

〈보기〉

- (가) 값이 서로 다른 T 의 고유치들의 개수가 V 의 차원보다 작으면 T 는 대각화가 불가능하다.
- (나) 서로 다른 T 의 두 고유치 λ_1, λ_2 에 대하여 $E_{\lambda_1} \cup E_{\lambda_2}$ 는 영벡터로 이루어져 있다.
- (다) T 가 대각화가 가능할 필요충분조건은 T 의 모든 고윳값 λ 의 중복도가 E_λ 의 차원과 같다는 것이다.

- ① 3개 ② 2개 ③ 1개 ④ 0개

예제 1.36 3×3 행렬 A 의 고유치가 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$ 이다. 전치행렬(transpose matrix) A^T 와 역행렬 A^{-1} 에 대한 행렬식(determinant)값이 각각 $\det(A^T) = a$ 와 $\det(A^{-1}) = b$ 일 때, $\frac{a}{b}$ 의 값은 얼마인가? (한국항공대 2016)

- ① 1 ② 5 ③ 6 ④ 36

예제 1.37 행렬 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ 의 역행렬 A^{-1} 에 대한 대각합(trace), 즉 $tr(A^{-1})$ 은 얼마인가?(한국항공대

2016)

① $\frac{25}{4}$

② $\frac{13}{2}$

③ $\frac{27}{4}$

④ $\frac{14}{2}$

6.2 행렬의 대각화(Diagonalization of Matrix)

1. 대각화 가능한 행렬(Diagonalizable matrix)

(1) 정의

n 차 정방행렬 $A := [a_{ij}] \in M_n$ 가 다음 조건을 만족할 때, A 를 대각화 가능한 행렬(diagonalizable matrix)이라고 한다. 이 때 P 를 대각화에 대한 추이행렬이라고 한다.

$$P^{-1}AP = D$$

(단, P : 정칙행렬 & D : 대각행렬)

[참고] 대각화 가능한 행렬 A 는 대각행렬 D 와 닮음행렬이다.

(2) 행렬의 대각화의 유용성

행렬의 대각화는 다음과 같은 상황에서 아주 유용하게 사용된다.

- ① 행렬의 거듭제곱의 계산
- ② 차분방정식(difference equation)이 풀이
- ③ 2차 점화식에 의한 수열의 일반항 구하기
- ④ 선형연립미분방정식의 풀이

2. 대각화 가능한 행렬의 필요충분조건

(1) n 차 정방행렬 A 와 B 가 서로 닮음이면 A 와 B 는 특성방정식이 같다.

(2) $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k, (1 \leq k \leq n)$ 를 n 차 정방행렬 A 의 서로 다른 고윳값이라 하고 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k$ 를 각각 이에 대응하는 고유벡터라고 하면 $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k\}$ 는 일차독립이다.

(3) 【대각화 정리】

『 n 차 정방행렬 $A \in M_n$ 가 대각화 가능한 행렬일 필요충분조건은 A 가 n 개의 일차독립인 고유벡터를 갖는 것이다.』

3. 대각화가능한 행렬의 대각화 과정

n 차 정방행렬 A 가 대각화가능한 행렬일 때, 다음과 같은 과정을 통해서 대각화 $P^{-1}AP = D$ 를 할 수 있다.

【행렬 A 의 대각화 과정】

[step1] 행렬 A 고윳값 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 을 구함:

(풀이) $p(\lambda) := \det(\lambda I_n - A) = 0 \Rightarrow \therefore \lambda_j = ?$

[step2] A 의 일차독립인 고유벡터 $\mathbf{x}_{\lambda_1}, \mathbf{x}_{\lambda_2}, \dots, \mathbf{x}_{\lambda_n}$ 를 구함:

(풀이) [step1]에서 구한 고윳값 λ_k 를 $A\mathbf{x}_{\lambda_k} = \lambda_k \mathbf{x}_{\lambda_k}$ 에 대입한다. 이때 λ_k 는 서로 다를 필요가 없다.

$$\Rightarrow [A - \lambda_k I_n : \vec{0}]$$

$\Rightarrow \therefore \mathbf{x}_{\lambda_k} = ?$ ($\therefore$ 가우스 소거법 또는 가우스-조르당 소거법을 이용)

[step3] 대각행렬 D 와 추이행렬 P 의 구성:

(풀이) $D := \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ & $P = [\mathbf{x}_{\lambda_1} \ \mathbf{x}_{\lambda_2} \ \dots \ \mathbf{x}_{\lambda_n}]$

예제 2.1 n 차 정방행렬 A 와 B 가 서로 닮음이면 A 와 B 는 특성방정식이 같음 보여라.

예제 2.2 **【대각화 정리】** n 차 정방행렬 $A \in M_n$ 가 대각화 가능한 행렬일 필요충분조건은 A 가 n 개의 일차독립인 고유벡터를 갖는 것이다.

예제 2.3 A 와 B 가 $A \sim B$ 인 $n \times n$ 행렬일 때, 다음이 성립함을 보여라.

(1) $\det(A) = \det(B)$

(2) $A : \text{가역행렬} \Leftrightarrow B : \text{가역행렬}$

(3) $\text{rank}(A) = \text{rank}(B)$

(4) A 와 B 는 같은 특성다항식을 갖는다.

(5) A 와 B 는 같은 고윳값을 가진다.

예제 2.4 [예제 2.3]의 (1) ~ (5)까지의 모든 성질을 공유하는 $n \times n$ 행렬 A 와 B 는 닮음인가?

예제 2.5 n 차 정방행렬 A 에 대하여 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ 가 서로 다른 A 의 고윳값이고 각 B_i 가 고유공간 E_i 의 기저이면, $B = \bigcup_{i=1}^k B_i$ 는 일차독립이다.

예제 2.6 **【대각화 정리】** A 가 서로 다른 고윳값 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ 를 가지는 n 차 정방행렬일 때 다음은 동치임을 보여라.

- (1) A 는 대각화 가능하다.
- (2) A 의 고유공간의 기저들의 합집합 B 는 n 개의 벡터를 포함한다.
- (3) 각 고윳값들의 대수적 중복도는 그것의 기하적 중복도와 같다.

예제 2.7 아래 행렬 A 가 대각화가능을 판단하라. 또한 대각화가능하면 대각화에 대한 추이행렬 P 를 구하고 A 를 대각화하여라.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

예제 2.8 다음 행렬 A 가 대각화가능하면 A 를 대각화하는 행렬(즉, 추이행렬) P 를 구하여라.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & 4 \end{bmatrix}$$

예제 2.9 다음과 같이 주어진 선형사상 $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ 에 대하여 T 의 (표준)행렬을 대각화하는 $\mathbb{R}^3$ 의 기저를 구하여라.

$$T(x_1, x_2, x_3) = (3x_1 - 2x_2, -2x_1 + 3x_2, 5x_3)$$

예제 2.10 다음 주어진 행렬 A 가 대각화가능하도록 하는 실수 값 k 를 모두 구하여라.

$$(1) A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & k \end{bmatrix}$$

$$(2) A = \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(3) A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & k \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(4) A = \begin{bmatrix} 1 & k & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

예제 2.11 일반적으로, 두 행렬의 닮음을 보이는 것은 쉽지 않다. 그러나 두 행렬이 대각화가능한 행렬이면, 닮은 행렬인지 아닌지 판정하는 것은 쉬워진다. 두 행렬 A 와 B 가 대각행렬과 닮은 행렬임을 보임으로써 그들이 닮은 행렬임을 보이고 $P^{-1}AP = B$ 를 만족하는 가역행렬 P 를 구하여라.

$$(1) A = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -6 & 4 \end{bmatrix}$$

$$(2) A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -3 & -2 & 0 \\ 6 & 5 & 0 \\ 4 & 4 & -1 \end{bmatrix}$$

예제 2.12 복소수 성분을 갖는 정방행렬 A , B 와 가역행렬 P 가 $A = PBP^{-1}$ 의 관계를 만족할 때, 다음 중 틀린 것을 고르며? (단, 임의의 정방행렬 M 에 대하여 $\det(M)$ 은 M 의 행렬식을 나타내고, $\text{tr}(M)$ 은 대각원소의 합을 나타낸다.) (중앙대 2009)

- ① $\det(A) = \det(B)$

② $\text{tr}(A) = \text{tr}(B)$
- ③ A 와 B 는 동일한 계수(rank)를 갖는다.

④ A 와 B 는 동일한 고유벡터를 갖는다.

예제 2.13 두 정방행렬 A, B 가 어떤 가역행렬 P 에 대하여 $B = PAP^{-1}$ 을 만족할 때, 다음 중 옳은 것을 모두 고르면?(국민대 2012)

- ㉠ 행렬 A, B 의 행렬식의 값은 서로 같다.

㉡ 행렬 A, B 의 대각합(trace)이 서로 같다.

㉢ 행렬 A, B 의 계수(rank)가 서로 같다.

㉣ 행렬 A, B 의 고유값이 서로 같다.
- ① ㉠

② ㉠, ㉢

③ ㉠, ㉢, ㉣

④ ㉠, ㉢, ㉣, ㉡

예제 2.14 실수에서 정의된 다음 행렬 중 대각화 되지 않는 것을 고르시오. (홍익대 2012)

- $$\textcircled{1} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \qquad \textcircled{2} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \qquad \textcircled{3} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \qquad \textcircled{4} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$$

예제 2.15 다음 행렬 중 대각화가 가능하지 않은 것을 고르면?(세종대 2013)

- $$\textcircled{1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad \textcircled{2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad \textcircled{3} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad \textcircled{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

예제 2.16 행렬 $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ 는 대각화가능한 행렬(적당한 정칙행렬 P 가 존재하여 $P^{-1}AP$ 는 대각행렬)이다. 이를 만족시키는 정칙 행렬 P 를 구하면?(광운대 2010)

- ① $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ ② $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ ③ $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ ④ $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ ⑤ $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

예제 2.17 행렬 $Q = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}$ 의 고유벡터들로 이루어진 행렬 P 를 이용하여 대칭행렬 $S = P^{-1}QP$ 를 얻었다. S 의 성분이 아닌 것은?(중앙대 1999)

- ① 0 ② 1 ③ $\sqrt{17}$ ④ $1 + \sqrt{17}$ ⑤ $1 - \sqrt{17}$

예제 2.18 행렬 $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ -7 & 2 & -3 \end{bmatrix}$ 의 고유벡터(eigenvector)를 각각 $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ 라 하고 고유벡터로 이루어진 행렬을 $U = [\mathbf{u}_1 \ \mathbf{u}_2 \ \mathbf{u}_3]$ 라 할 때, 행렬 $U^{-1}AU$ 의 모든 원소(element)들의 합은 얼마인가? (여기서 U^{-1} 는 행렬 U 의 역행렬을 나타낸다.)(중앙대 2006)

- ① -4 ② 0 ③ 1 ④ 8

예제 2.19 $A = \begin{bmatrix} a & 0 & 1 \\ 3 & b & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 에 대해 $PAP^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 을 만족하는 행렬 P 가 존재하기 위한 a, b 의 조건을 구하여라.(한양대 2006)

4. 대칭행렬의 직교대각화

(1) 정의

정방행렬(또는 정사각행렬) $P \in M_n$ 가 다음 조건을 만족할 때 P 를 **직교행렬**(orthogonal matrix)이라고 정의한다.

$$PP^t = I_n = P^tP$$

또한, 정방행렬 $A \in M_n$ 에 대하여 A 를 대각화하는 직교행렬 P 가 존재할 때 A 를 **직교대각화가능**(orthogonally diagonalizable)하다고 하고 P 는 A 를 **직교대각화하는 행렬**이라고 한다.

$$P^tAP = D$$

[참고] ① $P \in M_n$: 직교행렬(orthogonal matrix) $\Leftrightarrow P^{-1} = P^t$

② 직교행렬 $P \in M_n$ 의 열벡터의 집합 $\{P^{(1)}, P^{(2)}, \dots, P^{(n)}\}$ 은 정규직교집합(orthonormal set)이다.

(2) 직교행렬과 직교대각화가능 행렬에 대한 기본성질

1. $P \in M_n$ 가 직교행렬일 때 다음이 성립한다.

- (1) $\|P\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\|, \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ (2) $\langle P\mathbf{x}, P\mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle, \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$
- (3) P^{-1} : 직교행렬 (4) $\det(P) = \pm 1$
- (5) λ 가 P 의 고윳값 $\Rightarrow |\lambda| = 1$
- (6) $P_1, P_2 \in M_n$: 직교행렬 $\Rightarrow P_1P_2$: 직교행렬

2. **【직교대각화 정리】** n 차 정방행렬 $A \in \mathbb{R}^n$ 에 대하여 다음은 서로 동치관계이다.

- (1) A 는 직교대각화가능하다.
- (2) A 는 n 개의 고유벡터의 정규직교집합을 갖는다.
- (3) A 는 대칭행렬이다.

3. **【스펙트럼 정리: Spectrum theorem】** $A \in M_n(\mathbb{R})$ 일 때 다음이 성립한다.

$$A : \text{대칭행렬} \Leftrightarrow A : \text{직교대각화가능 행렬}$$

[참고] ① $A \in M_n(\mathbb{R})$ 인 대칭행렬이면 A 의 고윳값은 모두 실수이다.

② 대칭행렬 $A \in M_n$ 의 서로 다른 두 고윳값에 대응하는 고유벡터는 서로 직교한다.

③ 같은 고윳값에 대응하는 고유벡터들은 직교일 필요는 없다.

④ (실)대칭행렬 $A \in M_n(\mathbb{R})$ 는 「스펙트럼 정리」에 의해서 직교행렬 $P = [P^{(1)} \ P^{(2)} \ \dots \ P^{(n)}]$ 와 대각행렬 $D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ 에 대하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$A = PDP^t = \sum_{k=1}^n \lambda_k P_{(k)} P_{(k)}^t = \lambda_1 P_{(1)} P_{(1)}^t + \lambda_2 P_{(2)} P_{(2)}^t + \dots + \lambda_n P_{(n)} P_{(n)}^t$$

이 표현을 A 의 **스펙트럼 분해**(spectral decomposition)라고 한다.

예제 2.20 $P \in M_n$ 가 직교행렬(orthogonal matrix)일 때 다음이 성립함을 보여라.

- (1) $\|P\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\|, \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$
- (2) $\langle P\mathbf{x}, P\mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle, \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$
- (3) P^{-1} : 직교행렬
- (4) $\det(P) = \pm 1$
- (5) λ 가 P 의 고윳값 $\Rightarrow |\lambda| = 1$
- (6) $P_1, P_2 \in \mathbb{R}^n$: 직교행렬 $\Rightarrow P_1 P_2$: 직교행렬

예제 2.21 $A \in M_n(\mathbb{R})$ 이면 A 의 고윳값은 모두 실수이다.

예제 2.22 대칭행렬 $A \in M_n$ 의 서로 다른 두 고윳값에 대응하는 고유벡터는 서로 직교한다.

예제 2.23 대칭행렬 $A = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$ 를 직교대각화하여라.

예제 2.24 다음 주어진 대칭행렬 A 를 직교대각화 하는 직교행렬 P 를 구하여라.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

예제 2.25 대칭행렬 $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ 를 직교대각화하고, 그것을 이용하여 **스펙트럼 분해**를 구하여라.

예제 2.26 고윳값 $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -2$ 와 이에 대응하는 고유벡터가 각각 $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \end{bmatrix}$ 인 2 차 정방행렬을 구하여라.

예제 2.27 고윳값 $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -4$, $\lambda_3 = -4$ 와 이에 대응하는 고유벡터가 각각

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

인 3 차 대칭행렬을 구하여라.

예제 2.28 $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & a & b \\ d & \frac{1}{\sqrt{2}} & c \\ e & f & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$ 가 직교행렬일 때 $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2$ 의 값은?(한국항공대 2013)

① $\frac{3}{4}$

② $\frac{5}{4}$

③ $\frac{7}{4}$

④ $\frac{9}{4}$

예제 2.29 행렬 $A = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ 이고 $\vec{u}$ 는 단위벡터일 때, 벡터 $\overrightarrow{Au}$ 의 크기(norm) $\|\overrightarrow{Au}\|$ 는?(한

양대 2004)

① 0

② 1

③ 2

④ 4

예제 2.30 u, v 가 서로 수직인 3 차원 단위벡터이고 $w = u \times v$ 라 하자.

$u = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle, v = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle, w = \langle w_1, w_2, w_3 \rangle$ 일 때, 행렬 $A = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix}$ 에 대하여, [보기]

중 옳은 것을 모두 고른 것은?(한양대 2010)

가. $A^{-1} = A^T$

나. $\det(A) = 1$

다. A 의 고유치 중엔 반드시 1 혹은 -1 이 있다.

① 가

② 다

③ 가, 나

④ 가, 나, 다

예제 2.31 정칙행렬 $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ 가 $A^{-1} = A^T$ 를 만족시킬 때 A^2 의 행렬식은?(광운대 2012)

① $-\frac{1}{n^2}$

② $-\frac{1}{n}$

③ 1

④ n

⑤ n^2

예제 2.32 행렬 $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ 에서 서로 다른 임의의 두 개의 고유값(eigenvalue)을 λ, μ 라 하자. λ 의 고유벡터

(eigenvector)를 $\mathbf{v}$, μ 의 고유벡터를 $\mathbf{w}$ 라 할 때, $\mathbf{v}^T \mathbf{w}$ 의 값으로 가능한 것은?(한양대 2009)

- ① 0 ② 1 ③ $\frac{3}{4}$ ④ $\frac{9}{16}$

예제 2.33 $n \times n$ 행렬 A 에 대한 다음 설명 중 나머지 셋과 동치가 아닌 것은?(중앙대 2011)

- ① A 의 열벡터는 유클리드 내적에 관하여 정규직교집합(orthonormal set)을 이룬다.
 ② $\mathbb{R}^n$ 의 임의의 벡터 $\mathbf{x}$ 에 대하여 $\|A\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\|$ 이다.
 ③ $\mathbb{R}^n$ 의 임의의 벡터 $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ 에 대하여 $A\mathbf{x} \cdot A\mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ 이다.
 ④ A 는 직교대각화 가능하다.

예제 2.34 행렬 $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$ 는 적당한 직교행렬 P 에 대하여 $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ 을 만족한다.

P 의 열을 순서대로 $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ 라 할 때, $\mathbf{u}_1 \mathbf{u}_1^T + \mathbf{u}_2 \mathbf{u}_2^T$ 을 구하면?(중앙대 2011)

- ① $\frac{1}{6} \begin{bmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ ② $\frac{1}{10} \begin{bmatrix} 13 & -4 & 5 \\ -4 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ ③ $\begin{bmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ④ $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

5. 정방행렬의 거듭제곱

n 차 정방행렬 $A \in M_n$ 가 대각화가능하면 추이행렬 P 와 대각행렬 D 가 존재해서

$$A = PDP^{-1}$$

를 만족하기 때문에 $k \in \mathbb{N}$ 에 대하여 행렬 A 의 거듭제곱 A^k 는 다음과 같이 표현된다.

$$A^k = (PDP^{-1})^k = (PDP^{-1})(PDP^{-1}) \dots (PDP^{-1}) = PD^kP^{-1}$$

[주의] 이때 $D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ 이고 $D^k = \text{diag}(\lambda_1^k, \lambda_2^k, \dots, \lambda_n^k)$ 이다

6. 차분방정식(Difference Equation)

n 차 정방행렬 $A \in M_n$ 에 대하여 반복법(recurrence)으로 주어지는 다음과 같은 방정식을 **차분방정식** (difference equation)이라고 한다.

$$\mathbf{x}_k = A\mathbf{x}_{k-1}, \quad (k = 1, 2, \dots)$$

이러한 차분방정식에 초기 벡터 $\mathbf{x}_0$ 가 주어지면 차분방정식에 의해 생성되는 벡터의 수열 $\{\mathbf{x}_k\}$ 는

$$\mathbf{x}_k = A\mathbf{x}_{k-1} = A(A\mathbf{x}_{k-2}) = A^2\mathbf{x}_{k-2} = \dots = A^k\mathbf{x}_0$$

에 의해 표현된다. 따라서 행렬 A 가 대각화가능하면 $A = PDP^{-1}$ (단, P : 추이행렬 & D : 대각행렬)로 표현되므로

$$\mathbf{x}_k = A^k\mathbf{x}_0 = PD^kP^{-1}\mathbf{x}_0$$

에 의해 차분방정식에 의해 생성되는 수열의 패턴을 분석할 수 있다.

7. [케일리-해밀턴 정리: Cayley-Hamilton theorem]

n 차 정방행렬 $A \in M_n(\mathbb{C})$ 의 특성다항식 $p(\lambda) = |\lambda I_n - A|$ 이면 $p(A) = O$ 이다.

[참고] O 는 n 차 영행렬(zero matrix)이다.

예제 2.35 행렬 $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ 에 대해 다음을 구하여라.

(1) A^{10}

(2) $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}^{10} \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$

예제 2.36 행렬의 대각화를 이용하여 다음 주어진 행렬의 거듭제곱을 구하여라.

(1) $\begin{bmatrix} -5 & 8 \\ -4 & 7 \end{bmatrix}^5$

(2) $\begin{bmatrix} 0 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}^{-5}$

(3) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}^{2002}$

(4) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^k$

예제 2.37 어떤 생태학자에 의해 매달 고지대에 살고 있는 사슴들의 60%가 고지대에 남아있고 40%는 저지대로 이동하며, 한편 저지대에 살고 있는 사슴들의 80%는 저지대에 살고 20%가 고지대로 이동하는 것이 관찰되었다. 현재 전체 사슴들 중 90%가 고지대에 있고 10%가 저지대에 있다면 오랜 시간이 지난 후 각각 고지대와 저지대에 살아남는 사슴의 비율을 구하여라.

예제 2.38 차분방정식 $\mathbf{x}_k = A\mathbf{x}_{k-1}$, ($k = 1, 2, \dots$)에서 행렬 A 와 초기벡터 $\mathbf{x}_0$ 가 각각 다음과 같이 주어질 때 $\mathbf{x}_{10}$ 을 구하고, $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}_k$ 를 추정하여라.

$$(1) A = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.2 & 0.8 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{【마코프 연쇄: Markov chain】}$$

$$(2) A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

예제 2.39 다음과 같이 주어진 수열을 **피보나치 수열**(Fibonacci sequence)이라고 한다.

$$x_0 = x_1 = 1, \quad x_{n+1} = x_n + x_{n-1}, \quad (n = 1, 2, \dots)$$

행렬의 대각화를 이용하여 피보나치 수열에 대한 일반항 x_n 을 구하여라.

예제 2.40 행렬의 대각화를 이용하여 다음 주어진 수열의 점화식의 일반항 x_n 을 구하여라.

(1) $x_0 = 1, x_1 = 5, x_{n+1} = 5x_n - 6x_{n-1} \quad (n \geq 1)$

(2) $x_0 = 4, x_1 = -1, x_{n+1} = 4x_n + 5x_{n-1} \quad (n \geq 1)$

예제 2.41 $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -7 & -4 \end{bmatrix}$ 일 때 A^{100} 을 구하시오. (홍익대 2008)

- ① $\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -7 & -5 \end{bmatrix}$ ② $\begin{bmatrix} -5 & -3 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}$ ③ $\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -7 & -4 \end{bmatrix}$ ④ $\begin{bmatrix} -4 & -3 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}$

예제 2.42 행렬 A 는 등식 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$ 을 만족한다. 행렬 A^{10} 의 모든 성분의 합을 구하시오. (이화여대 2012)

예제 2.43 행렬 $A = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$ 의 고윳값은 3 과 2 이고 이에 대응하는 고유벡터는 각각 $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ 과 $\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ 이다. A^{100} 은? (서울과학기술대 2011)

- ① $\begin{bmatrix} 4 \cdot 3^{100} - 3 \cdot 2^{100} & -3^{101} + 3 \cdot 2^{100} \\ 4 \cdot (3^{100} - 2^{100}) & -3^{101} + 4 \cdot 2^{100} \end{bmatrix}$ ② $\begin{bmatrix} 4 \cdot (3^{100} - 2^{100}) & -3^{101} + 3 \cdot 2^{100} \\ 4 \cdot 3^{100} - 3 \cdot 2^{100} & -3^{101} + 4 \cdot 2^{100} \end{bmatrix}$
- ③ $\begin{bmatrix} 4 \cdot 3^{100} - 3 \cdot 2^{100} & -3^{101} + 4 \cdot 2^{100} \\ 4 \cdot (3^{100} - 2^{100}) & -3^{101} + 3 \cdot 2^{100} \end{bmatrix}$ ④ $\begin{bmatrix} -3^{101} + 3 \cdot 2^{100} & 4 \cdot 3^{100} - 3 \cdot 2^{100} \\ -3^{101} + 4 \cdot 2^{100} & 4 \cdot (3^{100} - 2^{100}) \end{bmatrix}$

예제 2.44 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ 일 때 A^{20} 는? (중앙대 공대 2012)

① $A = \begin{bmatrix} -2^{20} + 2 & 2^{20} - 1 \\ -2^{21} + 2 & 2^{21} - 1 \end{bmatrix}$

② $A = \begin{bmatrix} -2^{21} + 2 & 2^{20} - 1 \\ -2^{21} + 2 & 2^{21} - 1 \end{bmatrix}$

③ $A = \begin{bmatrix} -2^{20} - 2 & 2^{20} - 1 \\ -2^{21} - 2 & 2^{21} - 1 \end{bmatrix}$

④ $A = \begin{bmatrix} -2^{20} + 1 & 2^{20} - 1 \\ -2^{21} + 2 & 2^{21} - 1 \end{bmatrix}$

예제 2.45 2×2 행렬 A 의 고윳값(eigenvalue)이 1 과 -1 일 때, A^{2014} 은? (단, I 는 2×2 단위행렬)(단국대 2015)

① I

② $-I$

③ A

④ $-A$

예제 2.46 2×2 행렬 A 의 고윳값 $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 3$ 에 대응하는 고유벡터를 각각 $\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$ 이
라 할 때, $(A + I_2)^{2015}$ 의 모든 성분의 합은? (단, I_2 는 2×2 단위행렬이다.)(성균관대 2015)

① 2^{2015}

② 3^{2015}

③ 4^{2015}

④ 2^{4031}

⑤ 3^{4030}

예제 2.47 n 차 정방행렬 $A \in M_n$ 의 고윳값이 $1, 2, \dots, n$ 일 때, 다음 중 옳지 않은 것은? (성균관대 2011)

- ① A 의 행렬식 $\det(A) = n!$ 이다.
- ② $P^{-1}AP$ 가 대각행렬인 가역행렬 P 가 존재한다.
- ③ A 는 n 개의 일차독립인 고유벡터를 갖는다.
- ④ A 의 해공간의 차원은 n 이다.
- ⑤ 역행렬 A^{-1} 의 고윳값은 $1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}$ 이다.

예제 2.48 2 차 정사각행렬 A 가 $A^3 + A^2 - 3A + I_2 = O$ 을 만족한다. 다음 〈보기〉 중 옳은 것을 모두 고른 것은?

- (가) 1 은 A 의 고윳값이다.
 (나) A 의 행렬식은 1 이다.
 (다) A^{-1} 이 존재한다.
 (라) B 가 A 의 역행렬이라면 $B^3 - 3B^2 + B + I_2 = O$ 가 성립한다.

- ① 가, 나
- ② 가, 다
- ③ 다, 라
- ④ 나, 다, 라

예제 2.49 행렬 $A = \begin{bmatrix} 7 & 10 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$ 에 대해 다음의 벡터 $\mathbf{x}$ 중 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3}A\right)^n \mathbf{x} = \vec{0}$ 을 만족하는 것은?

- ① $\begin{bmatrix} 15 \\ -6 \end{bmatrix}$
- ② $\begin{bmatrix} 14 \\ -7 \end{bmatrix}$
- ③ $\begin{bmatrix} 7 \\ -3 \end{bmatrix}$
- ④ $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

예제 2.50 수열 $\{x_n\}, \{y_n\}$ 이 $n \geq 0$ 에 대하여 $\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix}$ 을 만족하고, 초기벡터 $\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

가 주어진다. 이때 극한 $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n)$ 의 값은? (세종대 2013)

① 1

② $\frac{10}{9}$ ③ $\frac{11}{9}$ ④ $\frac{4}{3}$

예제 2.51 행렬 $A = \begin{bmatrix} x & -3 \\ 2 & y \end{bmatrix}$ 가 $A^2 - 3A - I_2 = O$ 을 만족할 때, $x + y$ 의 값은? (한성대 2012)

(단, O 는 2 차원 영행렬이고, I_2 는 단위행렬이다.)

① -3

② -1

③ 1

④ 3

예제 2.52 행렬 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 0 \\ 5 & 6 & 7 & -1 \end{bmatrix}$ 가 주어져 있을 때, $A^8 - 4A^2 + 4I_4$ 를 간단히 쓰면? (단, 여기에서 I_4 는

단위행렬이다.) (중앙대 2010)

① O ② I ③ A ④ A^2

예제 2.53 3×3 행렬 A 의 특성방정식이 $f(\lambda) = \det(\lambda I_3 - A) = \lambda^3 + \lambda + 3$ 으로 주어진다고 할 때, $A^5 + 3A^2 + 2A - 3I_3$ 의 행렬식과 대각성분의 합을 각각 구하면? (단, I 는 3×3 단위행렬이다.) (중앙대 자연 2013)

- ① $-81, 0$ ② $-9, 0$ ③ $27, -3$ ④ $81, 3$

예제 2.54 행렬 $A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 에 대하여 $A^4 - 3A^3 + A^2 + 2A - 2I_3$ 의 대각합(trace)을 t , 행렬식을 d 라 하자(I_3 는 단위행렬). $t + d$ 를 구하면? (서강대 2009)

- ① 6 ② -5 ③ 5 ④ -6

8. 행렬지수(Matrix Exponential)

(1) 정의

주어진 스칼라 a 에 대해 지수함수 e^a 는 멱급수(power series)로 다음과 같이 표현된다.

$$e^a = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} a^k = 1 + a + \frac{1}{2!} a^2 + \frac{1}{3!} a^3 + \dots$$

이와 유사하게 $n \times n$ 정사각행렬 A 에 대해 **행렬지수**(matrix exponential) e^A 를 다음과 같이 수렴하는 멱급수의 형태로 정의한다.

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k = I_n + A + \frac{1}{2!} A^2 + \frac{1}{3!} A^3 + \dots$$

(2) 행렬지수의 성질

① 대각행렬 $D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ 의 행렬지수 e^D 는 다음과 같다.

$$e^D = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_n} \end{bmatrix}$$

② n 차 정방행렬 $A \in M_n$ 가 대각화가능 행렬일 때, 행렬지수 e^A 는 다음과 같다.

$$e^A = P e^D P^{-1} \quad (\text{단, } A = P D P^{-1})$$

9. 상수계수의 선형연립방정식

상수계수를 갖는 선형연립미분방정식

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \dots + a_{1n}y_n \\ y_2' = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{2n}y_n \\ \vdots \\ y_n' = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \dots + a_{nn}y_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \\ \vdots \\ y_n(0) \end{bmatrix}$$

$A := [a_{ij}] \in M_n$, $\mathbf{y} := [y_1 \ y_2 \ \dots \ y_n]^t$, $\mathbf{y}_0 := [y_1(0) \ y_2(0) \ \dots \ y_n(0)]^t$ 이라하면 선형연립미분방정식은 다음과 같은 행렬방정식으로 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{y}' = A\mathbf{y}, \quad \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0$$

이 선형연립미분방정식의 해는 다음과 같이 표현된다.

(1) $\mathbf{y}(t) = e^{tA} \mathbf{y}_0$: 선형연립미분방정식의 해

(2) $A \in M_n$ 가 대각화가능 행렬이고 $A = P D P^{-1}$, $P^{-1} \mathbf{y}_0 = \mathbf{c}$ 이면, 선형연립미분방정식의 해는 다음과 같다. (단, $P^{(k)} = \mathbf{v}_k$, $k = 1, 2, \dots, n$)

$$\mathbf{y}(t) = \sum_{k=1}^n c_k e^{\lambda_k t} \mathbf{v}_k = c_1 e^{\lambda_1 t} \mathbf{v}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} \mathbf{v}_2 + \dots + c_n e^{\lambda_n t} \mathbf{v}_n$$

예제 2.55 대각행렬 $D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ 의 행렬지수 e^D 는 다음과 같음을 보여라.

$$e^D = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{\lambda_n} \end{bmatrix}$$

예제 2.56 n 차 정방행렬 $A \in M_n$ 가 대각화가능 행렬일 때, 행렬지수 e^A 는 다음과 같음을 보여라. (행렬 A 는 $A = PDP^{-1}$ 로 대각화된다.)

$$e^A = Pe^DP^{-1}$$

예제 2.57 다음 주어진 행렬 A 에 대하여 행렬지수 e^A 를 구하여라.

(1) $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$

(2) $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

(3) $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(4) $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

예제 2.58 다음 초기값 문제의 해를 구하여라.

$$\begin{cases} y_1' = y_1 - 2y_2, & y_1(0) = 4 \\ y_2' = y_1 + 4y_2, & y_2(0) = -3 \end{cases}$$

6.3 이차형식(Quadratic Form)

1. 이차형식(Quadratic Form)

행렬은 선형연립방정식의 해의 연구에서 핵심적인 기능과 역할을 담당한다. 여기서는 이차방정식의 기하학적 해석에 행렬이 밀접하게 연관되어 있음을 알아보고자 한다. 특히 **이차형식**(quadratic form)은 물리학이나 기하학에서, 예를 들어, 원뿔곡선과 이차곡면(quadratic surface)등과 연관되어 나타난다. 이들을 주축(principal axis)형식으로 변환하는 문제는 행렬의 대각화와 관련이 깊은 매우 중요한 실제적인 문제이다.

n 개의 변수 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 을 변수 갖는 **이차형식**(quadratic form)은 다음과 같은 형태의 함수 $q: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 로 정의된다.

$$q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^t A \mathbf{x} = \langle A \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j$$

단, 여기서 $A := [a_{ij}] \in M_n$ 는 $n \times n$ **대칭행렬**이고 $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]^t \in \mathbb{R}^n$ 는 n -벡터이다.

[참고] ① 대칭행렬 A 를 q 의 **연관행렬**이라고 한다.

$$\textcircled{2} \mathbf{x}^t A \mathbf{x} = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \dots + a_{nn}x_n^2 + \sum_{i < j} 2a_{ij}x_i x_j$$

(1) 2 변수 x, y 에 대한 이차형식

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

(2) 3 변수 x, y, z 에 대한 이차형식

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

2. 최대 · 최소값 문제(Maximum and Minimum Problem)

$A \in M_n$ 가 대칭행렬이고 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$ 을 크기순으로 배열한 A 의 고윳값이라 할 때 $\mathbb{R}^n$ 에서 유클리드 내적에 대해 단위벡터인 n -벡터 $\mathbf{x}$ 에 대하여 다음 관계가 성립한다.

$$(1) \lambda_1 \geq \mathbf{x}^t A \mathbf{x} \geq \lambda_n$$

(2) $\mathbf{x}$ 를 λ_1 에 대한 고유벡터로 택하면 $\mathbf{x}^t A \mathbf{x} = \lambda_1$ 이고, λ_n 에 대한 고유벡터로 택하면 $\mathbf{x}^t A \mathbf{x} = \lambda_n$ 이다.

[참고] ① 대칭행렬 A 의 고윳값 λ 는 실수이다.

② 일반적으로 $\vec{0} (\neq \mathbf{x}) \in \mathbb{R}^n$ 일 때 대칭행렬 A 의 최대 고윳값 λ_1 과 최소 고윳값 λ_n 에 대해 다음과 같은 관계식이 성립한다.

$$\lambda_n \leq \frac{\mathbf{x}^t A \mathbf{x}}{\mathbf{x}^t \mathbf{x}} \leq \lambda_1$$

3. 【주축정리: Principal Axis Theorem】

$q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^t A \mathbf{x}$ 를 $n \times n$ 대칭행렬 A 의 이차형식이라 하고 P 를 A 를 직교대각화하는 행렬이라 하자. $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 을 A 의 고윳값이라 하면 치환

$$\mathbf{y} = P^t \mathbf{x}$$

에 의해서 $q(\mathbf{x})$ 는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$q(\mathbf{y}) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_n y_n^2$$

[참고] ① 『주축정리』는 이차형식의 2차 항에서 나타나는 교차항 $x_i x_j$ ($x_i \neq x_j$) 를 좌표축을 재구성해서 소거함으로써 이차형식을 알기 쉬운 형태로 표준화 할 수 있음을 보여준다.

② 『주축정리』에서 P 의 열 $P^{(j)}$ 을 이차형식 $q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^t A \mathbf{x}$ 의 주축(principal axis)이라고 한다.

예제 3.1 다음 주어진 이차형식을 행렬의 형태 $\mathbf{x}^t A \mathbf{x}$ 로 나타내어라.

(1) $4x^2 + 9y^2$

(2) $4x^2 + y^2 - 4xy$

(3) $5y^2 - 4xy$

(4) $x^2 + y^2 - 3z^2 + xy - 2yz$

(5) $2x^2 + 3y^2 + z^2 + 2xy - xz + yz$

(6) $2x^2 - 3z^2 - 5xy + yz$

예제 3.2 단위원 $x_1^2 + x_2^2 = 1$ 상에서 다음 주어진 이차형식의 **최대값**과 **최소값**을 구하여라.

(1) $x_1^2 + x_2^2 + 4x_1x_2$

(2) $2x_1^2 + 3x_2^2 - x_1x_2$

(3) $2x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_1x_2$

예제 3.3 단위 구면 $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$ 상에서 다음 주어진 이차형식의 **최대값**과 **최소값**을 구하여라.

(1) $2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3$

(2) $3x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_3$

예제 3.4 다음 주어진 이차형식의 교차항을 없애고 표준화하여라.

(1) $q(x_1, x_2) = 5x_1^2 + 2x_2^2 + 4x_1x_2$

(2) $q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_2x_3$

예제 3.5 $\sum_{i=1}^3 (x_i - \bar{x})^2 = \mathbf{x}' A \mathbf{x}$, 여기서 $\mathbf{x}' = (x_1, x_2, x_3)$, A 는 대칭행렬이다. 이 때, 대칭행렬 A 의 트레이스(trace)는 얼마인가? (단, $\bar{x} = \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3)$) (중앙대 2005)

① 3

② 2

③ 4

④ $\frac{3}{2}$

예제 3.6 공간벡터 $\mathbf{x}$ 를 전치한 벡터를 $\mathbf{x}^t = (x_1, x_2, x_3)$ 라 하고, 행렬 A 는 대칭행렬(symmetric matrix)이라 할 때, $x_1^2 + 7x_2^2 + 5x_3^2 + 6x_1x_2 + 5x_1x_3 + 4x_2x_3$ 는 $\mathbf{x}^t A \mathbf{x}$ 로 나타낼 수 있다. 행렬 A 의 i 행과 j 열의 원소를 a_{ij} 라 할 때, $a_{23} + a_{31}$ 은 얼마인가? (중앙대 2006)

① 4

② $\frac{9}{2}$

③ 5

④ $\frac{11}{2}$

예제 3.7 벡터 X 는 (x, y, z) 이고 행렬 A 는 $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ 일 때, $x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz$ 는 $X A X^T$ 으로

나타낼 수 있다. $a_{11} + a_{12} + a_{13} = 5$ 일 때 $a_{21} + a_{31}$ 의 값은? (단, X^T 는 X 의 전치행렬) (한국항공대 2013)

① 1

② -1

③ -3

④ 3

예제 3.8 행렬 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 과 영벡터가 아닌 벡터 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ 에 대한 함수 $R(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}^t A \mathbf{x}}{\mathbf{x}^t \mathbf{x}}$ 의 최댓값은?(한

양대 2002)

① 0

② 1

③ 2

④ 3

예제 3.9 이차형식 $q(x, y, z) = 3x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 2xy + 2yz$ 가 반지름이 1 인 구 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 위에서 가질 수 있는 최댓값과 최솟값의 합은?(중앙대 2010)

① 5

② 6

③ 7

④ 8

예제 3.10 단위 구면 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 위에서 이차형식(quadratic form)

$f(x, y) = x^2 + 2y^2 + z^2 + 2xy - 2yz$ 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라고 할 때, $M + m$ 의 값은?(성균관대 2011)

① 2

② 3

③ 4

④ 5

⑤ 6

4. 이차곡면(Quadratic Surface)

$\mathbb{R}^n$ 에서 정의되는 **이차곡면**(quadratic surface)을 $n \times n$ 대칭행렬 $A := [a_{ij}] \in M_n$, 상수벡터 $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ 와 스칼라 $c \in \mathbb{R}$ 에 대해 이차방정식

$$\langle A\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{b}, \mathbf{x} \rangle + c = 0 \quad (\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n)$$

을 만족하는 점들의 집합으로 정의한다. 이차곡면은 대칭행렬 A 를 직교대각화하는 행렬 P 에 의해서 다음과 같은 형태로 전환할 수 있다.

$A \in M_n$ 가 대칭행렬일 때 이차방정식

$$\langle \mathbf{x}, A\mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{x}, \mathbf{b} \rangle + c = 0, \quad (\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n)$$

은 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ 가 A 의 0이 아닌 고윳값일 때, 직교변환 $\mathbf{y} = P^t \mathbf{x}$ 과 평행이동 $z_i = y_i + \alpha_i$, ($i = 1, 2, \dots, k$)에 의해

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i z_i^2 + \sum_{i=k+1}^n \mu_i z_i + d = 0$$

형태로 전환할 수 있다.

[주의] ① $P^t A P = D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$, $P^t \mathbf{b} = [\mu_1 \ \mu_2 \ \dots \ \mu_n]^t$

② $z_i = \begin{cases} y_i + \alpha_i, & (i = 1, 2, \dots, k) \\ y_i, & (i = k+1, \dots, n) \end{cases}$

③ 이차곡면에서 $n = 2$ 일 때, 이에 대응하는 집합을 **이차곡선**(quadratic curve)이라고 한다.

5. 이차곡선(Quadratic Curve)

a, b, c 가 모두 0이 아닌 상수일 때 이차방정식

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

은 $ac - b^2$ 의 부호에 따라 다음과 같은 이차곡선을 나타낸다.

- (1) $ac - b^2 > 0$: 타원 ($\Leftrightarrow |A| > 0$)
- (2) $ac - b^2 < 0$: 쌍곡선 ($\Leftrightarrow |A| < 0$)
- (3) $ac - b^2 = 0$: 포물선 ($\Leftrightarrow |A| = 0$)

[참고] 행렬 A 는 이차형식 $ax^2 + 2bxy + cy^2$ 에 대한 대칭행렬 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$ 이다.

개념 및 내용

예제 3.11 다음 이차방정식이 나타내는 곡선이 무엇인지 밝히고 이차곡선의 그래프를 그려라.

$$5x^2 - 4xy + 8y^2 - 36 = 0$$

예제 3.12 이차곡선 $5x^2 - 4xy + 8y^2 + \frac{20}{\sqrt{5}}x - \frac{80}{\sqrt{y}} + 4 = 0$ 이 무엇인지 밝히고, 그 그래프를 그려라.

예제 3.13 다음 이차방정식에 대한 이차곡면은 무엇인지를 말하여라.

$$2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2xy + 2xz + 2yz - 5 = 0$$

예제 3.14 원뿔곡선 $5x^2 - 4xy + 8y^2 - 36 = 0$ 의 장축의 길이는?(국민대 2010)

① 4

② 6

③ 8

④ 10

예제 3.15 이차방정식 $11x^2 + 24xy + 4y^2 - 15 = 0$ 으로 표현되는 원뿔곡선의 형태는?(중앙대 2011)

① 타원

② 쌍곡선

③ 포물선

④ 직선

6.4 양의 정부호 행렬과 출레스키 분해

1. 양의 정부호 행렬(Positive Definite Matrix)

$n \times n$ 행렬 $A = [a_{ij}] \in M_n$ 와 $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_n]^t \in \mathbb{R}^n$ 에 대한 이차형식 $q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^t A \mathbf{x}$ 를 다음 중 하나로 분류한다.

행렬 A 의 정의	이차형식의 상태
양의 정부호 행렬 (positive definite matrix)	$\forall \mathbf{x} \neq \vec{0}, \quad q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^t A \mathbf{x} > 0$
양의 준정부호 행렬 (positive semidefinite matrix)	$\forall \mathbf{x} \neq \vec{0}, \quad q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^t A \mathbf{x} \geq 0$
음의 정부호 행렬 (negative definite matrix)	$\forall \mathbf{x} \neq \vec{0}, \quad q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^t A \mathbf{x} < 0$
음의 준정부호 행렬 (negative semidefinite matrix)	$\forall \mathbf{x} \neq \vec{0}, \quad q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^t A \mathbf{x} \leq 0$

[참고] ① $q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^t A \mathbf{x}$ 가 양의 값과 음의 값을 모두 가지면 **부정부호**(indefinite)라고 한다.

② 대칭인 양의 정부호 행렬의 집합을 간단히 PSym (Positive definite symmetric matrices)으로 정의하자.

2. 양의 정부호 행렬의 기본성질

(1) $A = [a_{ij}] \in M_n$ 가 **양의 정부호행렬**이면 다음이 성립한다.

- ① A 는 정칙행렬이다.
- ② A 의 모든 대각원소는 양수이다.

(2) A 가 $n \times n$ 대칭행렬일 때, 이차형식 $q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^t A \mathbf{x}$ 에 대해서 다음이 성립한다.

- ① A : 양의 정부호행렬 $\Leftrightarrow A$ 의 모든 고윳값은 양수이다.
- ② A : 양의 준정부호행렬 $\Leftrightarrow A$ 의 모든 고윳값은 음수가 아니다.
- ③ A : 음의 정부호행렬 $\Leftrightarrow A$ 의 모든 고윳값은 음수이다.
- ④ A : 음의 준정부호행렬 $\Leftrightarrow A$ 의 모든 고윳값은 양수가 아니다.
- ⑤ A : 부정부호행렬 $\Leftrightarrow A$ 가 양의 고윳값과 음의 고윳값을 갖는다.

3. 주 선도부분행렬(Leading Principal Submatrix)

(1) 정의

$n \times n$ 행렬 $A = [a_{ij}] \in M_n$ 에 대해 A 의 k 차의 주 선도부분행렬(leading principal submatrix)을 다음과 같이 정의한다.

$$A(1:k, 1:k) := \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{bmatrix}$$

(2) 관련성질

- ① $A \in M_n$ 의 모든 주 선도부분행렬이 정칙이면 A 의 LU 분해가 유일하게 존재한다.
- ② $A \in M_n$ 가 대칭인 양의 정부호행렬이면 A 의 모든 주 선도부분행렬도 양의 정부호이다.

4. 쉐레스키 분해(Cholesky Decomposition)

$A \in M_n$ 가 대칭인 양의 정부호행렬이면 하부삼각행렬 G 에 대해서

$$A = GG^t$$

인 A 의 쉐레스키 분해(Cholesky Decomposition)가 존재한다.

개념 및 내용

예제 4.1 행렬 $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ 가 양의 정부호임을 보여라.

예제 4.2 이차형식 $q(x, y, z) = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 2xy - 2xz - 2yz$ 가 양의 정부호인지, 음의 정부호인지, 부정부호인지 이 중 아무 것도 아닌지 판단하여라.

예제 4.3 다음 중 $\vec{0}$ 이 아닌 모든 3차 벡터 $\mathbf{v}$ 에 대하여 $\mathbf{v}^t A \mathbf{v} > 0$ 을 만족시키는 것은?(한양대 2009)

① $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

② $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

③ $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

④ $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

예제 4.4 다음 각 이차형식이 양의 정부호가 되도록 k 의 값을 구하여라.

(1) $x^2 + ky^2 - 4xy$

(2) $5x^2 + y^2 + kz^2 + 4xy - 2xz - 2yz$

예제 4.5 **홀레스키 분해**(Cholesky decomposition)를 이용하여 다음 연립방정식의 해를 구하여라.

$$\begin{cases} x - 2y + 2z = 4 \\ -2x + 5y - 3z = -7 \\ 2x - 3y + 6z = 10 \end{cases}$$

PART

+

-

×

÷

07

복소벡터공간 (Complex Vector Space)

7.1 복소벡터공간 및 유니타리 공간
(Complex Vector Space & Unitary Space)

7.2 복소행렬(Complex Matrix)

7.3 행렬의 특이값분해
(Singular Value Decomposition)

7.1 복소벡터공간 및 유니타리 공간(Complex Vector Space & Unitary Space)

1. 복소벡터공간(Complex Vector Space)

일반적으로 $n \times n$ 정방행렬(또는 정사각행렬)은 복소수를 고윳값으로 가질 수 있고, 이에 대응하는 고유벡터도 복소벡터가 될 수 있다. 따라서 **복소수체**(complex field) $\mathbb{C}$ 를 기반으로 하는 **복소벡터공간**(complex vector space)을 이해하여야 행렬을 충분히 활용할 수 있다. 예를 들어 행렬 $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ 의 특성방정식은 $\lambda^2 + 1 = 0$ 이고, 이것은 실수해를 갖지 않는다. 따라서 실수체(real field) $\mathbb{R}$ 상에서 행렬 A 는 고윳값과 고유벡터를 갖지 않는다. 이러한 문제를 해결하기 위해 실수체에서 복소수체로 확대하는 것이 필요하다.

일반적으로 어떤 집합 V 와 복소수체 $\mathbb{C}$ 에 기본연산인 **합**(sum)과 **스칼라곱**(scalar multiplication)을 정의하고 다음과 같은 공리(axiom) 또는 성질을 만족하면 $(V, +, \cdot)$ 를 **복소벡터공간**(Complex vector space)이라고 한다.

임의의 벡터 $u, v, w \in V$ & $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ 일 때, 다음이 성립한다.

(1) 기본연산에 대한 닫힘성

- ① $u + v \in V$ (덧셈의 닫힘성)
- ② $\alpha \cdot u \in V$ (스칼라곱의 닫힘성)

(2) 가법성질

- ① $u + v = v + u$ (교환법칙)
- ② $u + (v + w) = (u + v) + w$ (결합법칙)
- ③ $\exists \vec{0} \in V$ s.t. $u + \vec{0} = \vec{0} = \vec{0} + u$ (항등원)
- ④ $\forall u, \exists (-1)u \in V$ s.t. $u + (-1)u = \vec{0}$ (역원)

(3) 스칼라곱 성질

- ① $\alpha(\beta u) = (\alpha\beta)u = \beta(\alpha u)$
- ② $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$ (분배법칙)
- ③ $(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$ (분배법칙)
- ④ $1u = u$

[참고] ① 복소수체 $\mathbb{C} := \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ 로 표기하고 $i := \sqrt{-1}$ 이다.

② 복소수 $z = a + bi$ 일 때, $\bar{z} := a - bi$ 로 정의하고 복소수 z 의 켤레복소수(conjugate complex)라고 한다.

③ $\mathbb{C}^n := \{(z_1, z_2, \dots, z_n) \mid z_k \in \mathbb{C}, k = 1, \dots, n\}$ 은 n 차원 유클리드 복소벡터공간(Euclidean complex vector space)이다.

④ $\mathbb{C}^n$ 의 표준기저: $\{e_1, e_2, \dots, e_n\} \Rightarrow \dim(\mathbb{C}^n) = n$

(단, $e_1 := (1, 0, \dots, 0)$, $e_2 := (0, 1, 0, \dots, 0)$, $\dots$, $e_n := (0, \dots, 0, 1)$)

2. $\mathbb{C}^n$ 에서 유클리드 내적과 거리(Euclidean inner product & distant on $\mathbb{C}^n$)

(1) 유클리드 내적(Euclidean inner product)

두 벡터 $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n) \in \mathbb{C}^n$ 에 대하여 $\mathbf{u}$ 와 $\mathbf{v}$ 의 유클리드 내적(Euclidean inner product)을 다음과 같이 정의한다.

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} := \sum_{k=1}^n u_k \overline{v_k} = u_1 \overline{v_1} + u_2 \overline{v_2} + \dots + u_n \overline{v_n}$$

(단, $\overline{v_k}$ 는 복소수 v_k 의 켈레복소수(conjugate complex)이다.)

(2) 유클리드 내적의 기본성질(Basic propertie of Euclidean inner product)

$\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{C}^n$ & 스칼라 $\alpha \in \mathbb{C}$ 에 대하여 유클리드 내적은 다음 성질을 만족한다.

- ① $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \geq 0$ & $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{u} = \vec{0}$ (양성)
- ② $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \overline{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}}$ (가환성)
- ③ $(\alpha \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = \alpha(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot (\overline{\alpha} \mathbf{v})$ (동차성)
- ④ $(\mathbf{u} \pm \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} \pm \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$ (분배성)

(3) 유클리드 놈과 거리(Euclidean norm & distance)

유클리드 내적의 기본성질에 의해서 $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n) \in \mathbb{C}^n$ 의 크기를 다음과 같이 정의하고 이것을 $\mathbf{u}$ 의 유클리드 놈(Euclidean norm)이라 하고 $\|\mathbf{u}\|$ 으로 나타낸다.

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}} := \sqrt{\sum_{k=1}^n |u_k|^2}$$

또한 두 벡터 $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$ 의 유클리드 거리(Euclidean distance)를 다음과 같이 정의한다.

$$d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| := \sqrt{\sum_{k=1}^n |u_k - v_k|^2}$$

3. 유니타리 공간(Unitary space)

$(V, +, \cdot)$ 가 복소벡터공간이라 하자. 함수 $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ 가 아래 조건(또는 성질)을 만족할 때 V 위에서의 **복소벡터공간에서의 내적**(inner product on complex vector space)이라 하고, $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ 를 **유니타리 공간**(Unitary space)이라 한다.

임의의 $u, v, w \in V$ & 임의의 스칼라 $\alpha \in \mathbb{C}$ 에 대하여 다음이 성립한다.

- | | |
|---|-------|
| (1) $\langle v, v \rangle \geq 0$ & $\langle v, v \rangle = 0 \Leftrightarrow v = 0$ | (양성) |
| (2) $\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$ | (가환성) |
| (3) $\langle \alpha u, v \rangle = \alpha \langle u, v \rangle = \langle u, \alpha v \rangle$ | (동차성) |
| (4) $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$ | (분배성) |

[참고] ① **복소벡터공간에서의 내적**이 정의된 복소내적공간을 **유니타리 공간**(Unitary space)이라 한다.

② $\mathbb{C}^n$ 에서의 유클리드 내적은 유니타리 공간의 정의를 만족한다.

③ 복소벡터공간에서 주어진 영이 아닌 두 벡터 u 와 v 의 **수직** 또는 **직교**(orthogonal)를 $u \perp v$ 로 표현하고 다음과 같이 정의한다.

$$u \perp v \Leftrightarrow \langle u, v \rangle = 0$$

④ 복소내적공간에서 주어진 기저(basis)를 **그람-슈미트 직교화 과정**을 마찬가지로 적용하여 **직교기저**(orthogonal basis) 및 **정규직교기저**(orthonormal basis)를 구할 수 있다.

개념 및 내용

예제 1.1 $\mathbb{C}^3$ 의 두 벡터 $\mathbf{u} = (3i, 1 - i, 2)$, $\mathbf{v} = (1 + i, -2i, 3 + 4i)$ 의 유클리드 내적(Euclidean inner product)과 유클리드 거리(Euclidean distance)를 구하여라.

예제 1.2 $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2) \in \mathbb{C}^2$ 에 대해 내적(inner product)이 아래와 같이 정의한다.

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 2u_1 \overline{v_1} + 3u_2 \overline{v_2}$$

다음 주어진 두 벡터의 내적을 구하여라.

(1) $\mathbf{u} = (i, i)$, $\mathbf{v} = (i, -i)$

(2) $\mathbf{u} = (2i, -1 + 2i)$, $\mathbf{v} = (3i, -1 + 2i)$

예제 1.3 $\mathbb{C}^2$ 에 대한 정규직교기저(orthonormal basis) $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ 에 대해서 $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^2$ 가 아래와 같이 정의되어 있다.

$$\mathbf{z} = (3 - 2i)\mathbf{u}_1 + (2 + 5i)\mathbf{u}_2$$

(1) 각각 $\langle \mathbf{z}, \mathbf{u}_1 \rangle$, $\langle \mathbf{z}, \mathbf{u}_2 \rangle$, $\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{z} \rangle$ 와 $\langle \mathbf{u}_2, \mathbf{z} \rangle$ 를 구하여라.

(2) $\mathbf{z}$ 의 놈(norm) $\|\mathbf{z}\|$ 를 구하여라.

예제 1.4 그람-슈미트 직교화 과정(Gram-Schmidt orthogonalization process)을 적용하여 아래 주어진 세 벡터로 이루어진 $\mathbb{C}^3$ 의 기저 $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ 의 정규직교기저(orthonormal basis)를 구하여라. (단, 내적은 유클리드 내적이다.)

$$\mathbf{u}_1 = (i, i, i), \mathbf{u}_2 = (0, i, i), \mathbf{u}_3 = (0, 0, i)$$

예제 1.5 $\mathbb{C}^4$ 에서 $ix_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$ 의 해공간(solution space)의 정규직교기저(orthonormal basis)를 구하여라.

예제 1.6 유클리드 내적을 갖는 복소내적공간(또는 유니타리 공간) $\mathbb{C}^3$ 에서 다음 주어진 두 벡터가 수직(orthogonal)이기 위한 k 값을 구하여라.

(1) $\mathbf{u} = (2i, i, 3i), \mathbf{v} = (i, 6i, k)$

(2) $\mathbf{u} = (k, k, 1+i), \mathbf{v} = (1, -1, 1-i)$

7.2 복소행렬(Complex Matrix)

1. 복소행렬(Complex Matrix)

복소행렬(complex matrix)은 행렬의 모든 성분이 복소수로 이루어진 행렬로서 기본적인 대수적 성질은 실수를 성분으로 갖는 실(수)행렬과 유사하다.

복소수성분을 갖는 $m \times n$ 행렬의 공간을 $M_{m,n}(\mathbb{C})$ 로 나타내고, 특히 크기가 $n \times n$ 인 복소행렬의 공간을 $M_n(\mathbb{C})$ 로 나타낸다. $n \times n$ 실수행렬의 공간 M_n 에서 **대칭행렬**(symmetric matrix)과 **직교행렬**(orthogonal matrix)의 정의는 $M_n(\mathbb{C})$ 에서 각각 **에르미트 행렬**(Hermitian matrix)과 **유니타리 행렬**(Unitary matrix)로 일반화된다. 이에 따라 M_n 에서의 대각화 문제(diagonalization problem)를 $M_n(\mathbb{C})$ 에서의 대각화 문제로 확장해서 적용할 수 있다.

(1) 켈레전치행렬(Conjugate transpose matrix)

행렬 $A := [a_{ij}] \in M_{m,n}(\mathbb{C})$ 에 대해서 켈레행렬(conjugate matrix) $\overline{A}$ 와 켈레전치행렬(conjugate transpose matrix) A^* 를 다음과 같이 정의한다.

- (i) $\overline{A} := [\overline{a_{ij}}] \in M_{m,n}(\mathbb{C})$: A 의 켈레행렬

(ii) $A^* = \overline{A}^t := [\overline{a_{ij}}]^t \in M_{n,m}(\mathbb{C})$: A 의 켈레전치행렬

[참고] ① A^* 를 A^H 로 쓰기도 한다. 즉, $A^* = A^H$ 이다.

② $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ 이면 $A^* = A^t$ 이다.

(2) 켈레전치행렬의 성질

$A, B \in M_{m,n}(\mathbb{C})$, $C \in M_{n,r}(\mathbb{C})$ & 스칼라 $\alpha \in \mathbb{C}$ 에 대하여 다음 성질을 만족한다.

- ① $(A^*)^* = A$
- ② $(\alpha A \pm \beta B)^* = \overline{\alpha} A^* \pm \overline{\beta} B^*$
- ③ $(AC)^* = C^* A^*$

예제 2.1 다음 주어진 행렬의 켤레전치행렬(conjugate transpose matrix)을 구하여라.

$$(1) A = \begin{bmatrix} 1-i & 3 & -7i \\ 5 & 2+3i & 4 \end{bmatrix}$$

$$(2) B = \begin{bmatrix} 1 & 2+i \\ 2-i & 3 \end{bmatrix}$$

$$(3) C = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$$

$$(4) D = \begin{bmatrix} -2i & 1-i & -1+i \\ 1+i & 0 & 3 \\ -1-i & 3 & 3i \end{bmatrix}$$

예제 2.2 $A, B \in M_{m,n}(\mathbb{C})$, $C \in M_{n,r}(\mathbb{C})$ & 스칼라 $\alpha \in \mathbb{C}$ 에 대하여 다음 성질이 성립함을 보여라.

$$(1) (A^*)^* = A$$

$$(2) (\alpha A \pm \beta B)^* = \bar{\alpha} A^* \pm \bar{\beta} B^*$$

$$(3) (AC)^* = C^* A^*$$

2. 에르미트 행렬(Hermitian matrix) 및 반 에르미트 행렬(skew-Hermitian matrix)

(1) 정의

복소수성분을 갖는 복소행렬 $A := [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{C})$ 에 대하여 **에르미트 행렬**(Hermitian matrix)과 **반 에르미트 행렬**(skew-Hermitian matrix)을 다음과 같이 정의한다.

- (i) A : **에르미트 행렬**(Hermitian) $\Leftrightarrow A^* = A$
 (ii) A : **반 에르미트 행렬**(skew-Hermitian) $\Leftrightarrow A^* = -A$

[참고] ① 대칭인 실수행렬은 에르미트 행렬이고 에르미트 행렬의 대각성분은 모두 실수이다.
 ② 반대칭인 실수행렬은 반 에르미트 행렬이고 반 에르미트 행렬의 대각성분은 모두 순허수이거나 0이다.

(2) 에르미트 행렬의 성질

$A \in M_n(\mathbb{C})$ 가 에르미트 행렬(Hermitian matrix)일 때 다음 성질이 성립한다.

- ① A 의 고윳값은 모두 실수이다.
 ② A 의 서로 다른 고윳값에 대응하는 고유벡터는 서로 수직이다.

[참고] 실수성분을 갖는 대칭행렬의 고윳값은 실수이다.

3. 유니타리 행렬(Unitary matrix)

(1) 정의

복소수성분을 갖는 복소행렬 $A := [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{C})$ 에 대하여 **유니타리 행렬**(Unitary matrix)을 다음과 같이 정의한다.

$$U \in M_n(\mathbb{C}) : \text{유니타리 행렬 (Unitary)} \Leftrightarrow U^* U = I_n$$

[참고] ① 유니타리 행렬 U 는 가역(invertible)이고 $U^{-1} = U^*$ 이다.
 ② $U^{(i)*} U^{(j)} = \delta_{ij}$ 이므로 유니타리 행렬 U 의 열벡터 $\{U^{(1)}, U^{(2)}, \dots, U^{(n)}\}$ 는 $\mathbb{C}^n$ 에서 **정규직교 집합**을 이룬다.

(2) 유니타리 행렬의 성질

유니타리 행렬(Unitary matrix) $U \in M_n(\mathbb{C})$ 는 다음 성질이 성립한다.

- ① U 는 $\mathbb{C}^n$ 에서 내적(inner product)과 놈(norm)을 보존한다. 즉, $\|U\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\|$ 이다.
 ② λ 가 U 의 고윳값이면 $|\lambda| = 1$ 이다.
 ③ U 의 서로 다른 고윳값에 대응하는 고유벡터는 서로 수직을 이룬다.

예제 2.3 다음 주어진 행렬 A 가 에르미트 행렬(Hermitian matrix)임을 보이고 고윳값과 고유벡터를 구하여라.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2-i \\ 2+i & 4 \end{bmatrix}$$

예제 2.4 아래 에르미트 행렬(Hermitian matrix) A 의 고윳값과 고유벡터를 구하여라.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & i \\ 0 & -i & 3 \end{bmatrix}$$

예제 2.5 다음 주어진 행렬 A 가 유니타리 행렬(Unitary matrix)임을 보여라.

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1+i}{2} & \frac{1+i}{2} \\ \frac{1-i}{2} & \frac{-1+i}{2} \end{bmatrix}$$

예제 2.6

- ⑤ A 가 가역(invertible)일 때 A^{-1}

예제 2.7

- ④ - 1

4. 유니타리 대각화가능(Unitary diagonalizable)

(1) 정의

두 행렬 $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ 에 대해 다음 조건을 만족하는 유니타리 행렬(unitary matrix) U 가 존재할 때 A 와 B 는 유니타리 닮음(unitary similar)이라고 정의한다.

$$U^*AU = B$$

특히 행렬 $A \in M_n(\mathbb{C})$ 가 대각행렬과 유니타리 닮음이면 A 는 유니타리 대각화가능(unitary diagonalizable)이라고 한다. 즉, 다음 조건을 만족할 때 A 를 유니타리 대각화가능한 행렬(unitary diagonalizable matrix)이라고 한다.

$$U^*AU = D$$

(단, U : 유니타리 행렬 & D : 대각행렬)

(2) 유니타리 대각화가능 행렬의 관련 성질

1. [슈르 정리: Schur theorem]

모든 정사각행렬은 상부삼각행렬과 유니타리 닮음이다. 즉 A 가 $n \times n$ 행렬이면

$$U^*AU = T$$

를 만족하는 유니타리 행렬 U 와 상부삼각행렬 T 가 존재한다. 이때 T 의 대각성분은 A 의 고윳값이다.

2. [에르미트 행렬에 대한 스펙트럼 정리]

A 가 에르미트 행렬이면 A 를 대각화하는 유니타리 행렬 U 가 존재한다.

[참고] ① 『슈르 정리』에서 유니타리 행렬 U 나 상부삼각행렬 T 는 유일하지 않다. 그리고 A 의 고윳값의 배치에 따라 T 의 대각원은 임의의 순서로 배열될 수 있다. 그러나 이때 유니타리 닮음인 상부삼각행렬은 대응하는 대각원 상부의 원소들이 매우 다르게 나타날 수 있다.

② 『슈르 정리』에 따르면 정사각행렬 $A = UTU^*$ 로 분해될 수 있다. 이것을 슈르 분해(Schur decomposition)라고 한다.

③ A 가 에르미트 행렬이면 『슈르 분해』 $A = UTU^*$ 에서 T 는 대각행렬 D 가 된다.

5. 정규행렬(Normal matrix)

일반적으로 에르미트 행렬이 아니더라도 $A \in M_n(\mathbb{C})$ 가 n 개의 정규직교집합(orthonormal set)을 고유벡터로 가지면 A 는 유니타리 대각화가능하다. 예를 들어 반대칭행렬(skew-symmetric matrix)이나 반 에르미트 행렬(skew-Hermitian matrix)들이 이에 해당한다.

(1) 정의

복소수성분을 갖는 복소행렬 $A := [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{C})$ 에 대하여 **정규행렬**(Normal matrix)을 다음과 같이 정의한다.

$$A \in M_n(\mathbb{C}) : \text{정규행렬(Normal matrix)} \Leftrightarrow AA^* = A^*A$$

(2) 정규행렬(Normal matrix)관련 성질

1. $A \in M_n(\mathbb{C})$: 정규행렬 $\Leftrightarrow A$ 가 n 개의 정규직교인 고유벡터를 가짐.

2. 【정규행렬에 대한 스펙트럼 정리】

$A \in M_n(\mathbb{C})$ 에 대하여 다음은 서로 동치이다.

- (1) A : 유니타리 대각화가능.
- (2) A : 정규행렬.
- (3) A : n 개의 정규직교인 고유벡터를 가짐.

개념 및 내용

예제 2.8 다음 주어진 행렬 A 를 대각화하는 직교행렬 U 를 구하여라.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

예제 2.9 다음 주어진 복소행렬 A 를 대각화하는 유니타리 행렬 U 를 구하여라.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1-i \\ 1+i & 1 \end{bmatrix}$$

예제 2.10 복소행렬 $A = \begin{bmatrix} 2 & 1-2i \\ 1+2i & -2 \end{bmatrix}$ 를 대각화하는 유니타리 행렬 U 를 구하여라.

예제 2.11 실수행렬 $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ 가 정규행렬임을 보이고 A 를 대각화하여라.

예제 2.12 다음 중 복소행렬 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1+i \\ 1-i & 2 \end{bmatrix}$ 를 대각화하는 유니타리 행렬(unitary matrix)은?(성균관대 2014)

- ① $\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} -1-i & 1 \\ 1 & 1-i \end{bmatrix}$ ② $\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1+i & 1 \\ 1 & 1+i \end{bmatrix}$ ③ $\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1+i & -1 \\ 1 & 1-i \end{bmatrix}$
- ④ $\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 1-i \\ -1-i & 1 \end{bmatrix}$ ⑤ $\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} -1 & 1-i \\ 1+i & 1 \end{bmatrix}$

7.3 행렬의 특이값분해(Singular Value Decomposition)

1. 행렬의 특이값분해(SVD of Matrix)

$A \in M_{m,n}$ 에 대해 다음을 만족하는 직교행렬 $U \in M_m$ 과 $V \in M_n$ 가 존재한다.

$$A = U \Sigma V^t, \quad (\Sigma \in M_{m,n})$$

Σ 는 $A^t A$ 의 양의 고윳값을 순서대로 배열하여 $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_p > 0$ 라 할 때

$$\Sigma = \text{diag}(\sqrt{\sigma_1}, \sqrt{\sigma_2}, \dots, \sqrt{\sigma_p}, 0, \dots, 0) \in M_{m,n}$$

로 구성된 대각행렬이다.

[참고] Σ 의 양인 주대각성분들을 행렬 A 의 **특이값**(singular value)이라고 한다.

개념 및 내용

예제 3.1 행렬 $A = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 2 \\ 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$ 의 특이값분해(SVD)를 구하여라.

예제 3.2 다음 주어진 행렬 A 의 특이값(singular value)을 계산하고 A 의 특이값분해(SVD)를 구하여라.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

예제 3.3 다음과 같이 2×4 행렬 A 를 특이값 분해(SVD) 했을 때, 직교행렬 U 는? (단, 0 보다 큰 특이값은 $\sigma_1 > \sigma_2$ 라 가정한다.)(성균관대 2016)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = U \Sigma V^T, \quad \Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

① $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

② $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

③ $\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{bmatrix}$

④ $\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}$

⑤ $\frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$

+

-

×

÷

정답

01연립일차방정식과 행렬 (Linear equation & Matrices)

1.1연립일차방정식

예제 1.1

- (1) 한 점 (2, 1)에서 만나는 두 직선.
- (2) 일치하는 두 직선.
- (3) 평행한 두 직선.

예제 1.2

$$x_1 = -\frac{1}{2}, x_2 = \frac{1}{2}, x_3 = 2$$

예제 1.3

$$x_1 = 4 - 2s + t, x_2 = 2, x_3 = 1 + 2t, x_4 = t$$

($s, t \in \mathbb{R}$)

예제 1.4

- (1) (i) 최댓값 : 8, (ii) 최솟값 : 3
- (2) (i) 최댓값 : $\frac{57}{2}$, (ii) 최솟값 : $\frac{25}{3}$

1.2행렬과 행렬연산

예제 2.1

- (1) $A + B = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, $A - C = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$,
 $2B - \frac{1}{2}C = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 14 & -1 \\ 7 & -23 \end{bmatrix}$, $A - 3D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 4 \end{bmatrix}$
- (2) $E = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 3 & -9 \end{bmatrix}$
- (3) $AB = \begin{bmatrix} 10 & -15 \\ 4 & -20 \end{bmatrix}$, $BA = \begin{bmatrix} 4 & 12 \\ 7 & -14 \end{bmatrix}$,
 $(A + B)C = \begin{bmatrix} 13 & 14 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$,
 $(AB)C = \begin{bmatrix} 5 & -35 \\ -12 & -56 \end{bmatrix} = A(BC)$
- (4) $AD = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$, $DA = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$
- (5) $A^t B^t = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 12 & -14 \end{bmatrix}$,

$$(AB)^t = \begin{bmatrix} 10 & 4 \\ -15 & -20 \end{bmatrix} = B^t A^t$$

$$(6) A^2 = \begin{bmatrix} -2 & 15 \\ -5 & 13 \end{bmatrix}, B^2 = \begin{bmatrix} 16 & 0 \\ -2 & 25 \end{bmatrix},$$

$$A^2 B = \begin{bmatrix} 22 & -75 \\ 6 & -65 \end{bmatrix}, AB^2 = \begin{bmatrix} 10 & 75 \\ -72 & 100 \end{bmatrix}$$

예제 2.2

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, A^n = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{n}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$(A^n)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{n}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = (A^{-1})^n$$

예제 2.3

④

예제 2.4

③

예제 2.5

④

예제 2.6

①

예제 2.7

①

예제 2.8

②

예제 2.9

$$T = \frac{1}{2}(A - A^t) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

예제 2.10

②

예제 2.11

③

예제 2.12

②

예제 2.13

①

1.3 가우스 소거법

예제 3.1

해가 없다.

예제 3.2

$$x_1 = -\frac{7}{2}t, x_2 = -\frac{1}{2}t, x_3 = 4, x_t = t \quad (t \in \mathbb{R})$$

예제 3.3

②

예제 3.4

④

예제 3.5

④

예제 3.6

③

예제 3.7

④

예제 3.8

③

예제 3.9

①

예제 3.10

③

예제 3.11

③

예제 3.12

⑤

예제 3.13

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

예제 3.14

$$p(x) = 120 - 226x + 86x^2 - 19x^3$$

1.4 역행렬과 연립일차방정식

예제 4.1

A : 정칙행렬

B : 특이행렬

예제 4.2

$$A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 3 & 3 & -2 \\ 0 & 3 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$E_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, E_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, E_6 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$E_7 = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, E_8 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = E_8 E_7 \cdots E_2 E_1, A = E_1^{-1} E_2^{-1} \cdots E_7^{-1} E_8^{-1}$$

예제 4.3

(i) A^{-1} 가 존재하지 않는다.

(ii) 해집합 :

$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R} \mid A\mathbf{x} = \vec{0}\} = \{t(4, -1, 2) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

예제 4.4

$$(i) A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 5 & 10 & 20 \\ -5 & -5 & -10 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

(ii) B : 특이행렬

예제 4.5

$$(1) E = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(2) E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

예제 4.6

생략.

예제 4.7

$$(1) A^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}, B^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix},$$

$$(AB)^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 9 & -5 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}$$

$$(2) A^{-1}B^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 8 & 2 \\ -7 & -2 \end{bmatrix} \neq (AB)^{-1}$$

예제 4.8

$$A = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

예제 4.9

$$A(A^2 - 2A + 3I_n) = I_n$$

$$A^{-1} = A^2 - 2A + 3I_n$$

예제 4.10

$$(1) x_1 = \frac{15}{7}, x_2 = -\frac{10}{7}$$

$$(2) x_1 = -\frac{1}{8}, x_2 = -\frac{19}{8}$$

예제 4.11

$$(1) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix},$$

$$A^{-1} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} -6 & 10 & -8 \\ 7 & -5 & 4 \\ 1 & -3 & 4 \end{bmatrix},$$

$$x_1 = \frac{5}{2}, x_2 = -\frac{7}{4}, x_3 = -\frac{1}{4}$$

$$(2) \begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix},$$

$$A^{-1} = \frac{1}{30} \begin{bmatrix} 16 & 20 & -2 \\ 5 & -5 & 5 \\ -8 & -10 & 4 \end{bmatrix},$$

$$x_1 = \frac{2}{5}, x_2 = \frac{1}{2}, x_3 = 0$$

1.5블록행렬

예제 5.1

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

예제 5.2

(1) 생략.

$$(2) C = -A_{11}^{-1}A_{12}A_{32}^{-1}$$

예제 5.3

$$(1) A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & : & 0 & 0 \\ -1 & 1 & : & 0 & 0 \\ \dots & \dots & & \dots & \dots \\ 0 & 0 & : & 1 & 0 \\ 0 & 0 & : & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(2) B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & : & 0 & 0 \\ 0 & 1 & : & -1 & 0 \\ \dots & \dots & & \dots & \dots \\ 0 & 0 & : & 1 & -1 \\ 0 & 0 & : & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

예제 5.4

$$\begin{bmatrix} A_{11}B_{11} & O \\ O & A_{22}B_{22} \end{bmatrix}$$

예제 5.5

$$\begin{bmatrix} A_{11}B_{11}C_{11} & O \\ O & A_{22}B_{22}C_{22} \end{bmatrix}$$

예제 5.6

$$\begin{bmatrix} I_m & kA \\ O & I_n \end{bmatrix}$$

1.6행렬의 LU 분해와 연립일차방정식

예제 6.1

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A = LU$$

예제 6.2

$$x_1 = 1, \quad x_2 = \frac{3}{2}, \quad x_3 = -3$$

예제 6.3

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2-t \\ 1+t \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

02행렬식(Determinant)

2.1행렬식

예제 1.1

$$\det(A) = -2, \quad \det(B) = -17$$

예제 1.2

$$M_{12} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}, \quad M_{22} = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}, \quad M_{32} = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A_{12} = 10, \quad A_{22} = 20, \quad A_{32} = -4$$

예제 1.3

$$\det(A) = -20$$

예제 1.4

③

예제 1.5

①

예제 1.6

-13

2.2행렬식의 성질

예제 2.1

$$\det(B) = 10, \quad \det(C) = -10$$

예제 2.2

$$\det(B) = 20$$

예제 2.3

$$\det(A) = 51$$

예제 2.4

$$\det(A) = -63$$

예제 2.5

생략.

예제 2.6

$$(1) \det(AB) = -10$$

$$(2) \det(BA) = -10$$

$$(3) \det(B^2A) = -50$$

$$(4) \det(A^{-1}B) = -\frac{5}{2}$$

$$(5) \det(ABA) = 20$$

$$(6) \det(3A^3) = 3^4 \times (-2)^3 = -648$$

$$(7) \det(3A^{-1}) = -\frac{81}{2}$$

$$(8) |(3A)^{-1}| = -\frac{1}{162}$$

$$(9) |(A^tB)^{-1}| = -\frac{1}{10}$$

예제 2.7

$$\det(B) = \det(P^{-1}AP) = \det(P^{-1})\det(A)\det(P) = \det(A)$$

예제 2.8

①

예제 2.9

②

예제 2.10

④

예제 2.11

⑤

예제 2.12

①

예제 2.13

①

예제 2.14

②

예제 2.15

①

예제 2.16

①

예제 2.17

③

예제 2.18

0

예제 2.19

④

2.3수반행렬

예제 3.1

$$\det(A) = 4, \quad \text{adj}(A) = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 7 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 7 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

예제 3.2

(1) $|\text{adj}(A)| = 4$

(2) $A = \pm \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -6 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(3) 생략.

예제 3.3

②

예제 3.4

③

예제 3.5

④

예제 3.6

②

예제 3.7

①

2.4크래머의 공식

예제 4.1

$$x_1 = \frac{5}{12}, \quad x_2 = \frac{1}{12}, \quad x_3 = \frac{1}{12}$$

예제 4.2

②

예제 4.3

③

예제 4.4

(1) $x_1 = -2, \quad x_2 = \frac{3}{2}, \quad x_3 = \frac{1}{2}$

(2) $x_1 = -1, \quad x_2 = -1, \quad x_3 = 3$

(3) $x_1 = 1, \quad x_2 = \frac{1}{2}, \quad x_3 = \frac{1}{3}$

03 벡터공간(Vector Space)

③

3.1 벡터와 벡터공간

예제 1.1

생략.

예제 1.2

부분공간이 아니다. 즉, $W \not\subset V$

예제 1.3

생략.

예제 1.4

생략.

예제 1.5

$$N(A) = \left\{ s \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mid s, t \in \mathbb{R} \right\}$$

예제 1.6

$$(1) \mathbf{w} = \frac{3}{5}\mathbf{u} + \frac{14}{5}\mathbf{v}$$

(2) 가능하지 않다.

$$(3) \mathbf{w} = \frac{4}{7}\mathbf{u} - \frac{2}{7}\mathbf{v}$$

예제 1.7

$$(1) \mathbf{w} = -6\mathbf{u}_1 + \frac{15}{4}\mathbf{u}_2 - \frac{1}{4}\mathbf{u}_3$$

(2) 가능하지 않다.

$$(3) \mathbf{w} = -\frac{5}{3}\mathbf{u}_1 + \frac{14}{3}\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_3$$

예제 1.8

$$p(x) = -3p_1 + 2p_2 + 4p_3$$

예제 1.9

②

예제 1.10

예제 1.11

③

예제 1.12

④

3.2 기저와 차원

예제 2.1

(i) 기저: $\{(-2, 1, 1)\}$ (ii) $\dim(V) = 1$

예제 2.2

(i) 해공간 $N(A)$ 의 기저: $\left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

(ii) $\dim(N(A)) = 2$

예제 2.3

(i) $W \neq \mathbb{R}^3$ (ii) $\mathbf{v}_3 = 2\mathbf{v}_1 + 3\mathbf{v}_2 \Rightarrow W = \text{Sp}\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle$

예제 2.4

(1) (i) 좌표벡터 $(\mathbf{v})_S = (1, -1, 2)$

(ii) 좌표행렬 $[\mathbf{v}]_S = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$

(2) $\mathbf{u} = (11, 31, 7)$

예제 2.5

 $a = 5$

예제 2.6

②

예제 2.7

②

예제 2.8

②

예제 2.9

③

3.3행공간과 열공간

예제 3.1

$$(i) \text{Row}(A) = Sp \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix}^t, \begin{bmatrix} 0 \\ 7 \\ -9 \\ 2 \end{bmatrix}^t \right\rangle$$

$$(ii) \text{Col}(A) = Sp \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 8 \end{bmatrix} \right\rangle$$

$$(iii) N(A) = Sp \left\langle \begin{bmatrix} -17 \\ 9 \\ 7 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 17 \\ -2 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix} \right\rangle$$

$$(iv) \text{rank}(A) = 2 \text{ \& nullity}(A) = 2$$

예제 3.2

$$(1) \text{행공간의 기저} : \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}^t, \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}^t, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -9 \\ -3 \end{bmatrix}^t \right\}$$

$$(2) \text{열공간의 기저} : \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ -6 \end{bmatrix} \right\}$$

$$(3) \text{제차방정식 } A\mathbf{x} = \vec{0} \text{의 해공간의 기저} : \left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$$

예제 3.3

④

예제 3.4

③

예제 3.5

③

예제 3.6

②

예제 3.7

①

예제 3.8

③

예제 3.9

②

예제 3.10

③

예제 3.11

③

예제 3.12

①

04 선형변환

(Linear transformation)

4.1 선형변환

예제 1.1

선형사상(변환)이다.

예제 1.2

선형사상이 아니다.

예제 1.3

$$T(3 - 4x + x^2 - 2x^3) = 2 + x + 6x^2$$

예제 1.4

선형사상이다.

예제 1.5

선형사상이다.

예제 1.6

- (i) 선형사상이 아니다.
- (ii) 벡터 $\mathbf{a}$ 만큼의 평행이동이다.

예제 1.7

$$T(e^x) = e^x - e^a \text{ \& } T(x^2) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}a^3$$

예제 1.8

생략.

예제 1.9

생략.

예제 1.10

- (1) (i) $N(T) = \{\vec{0}\}$
- (ii) $R(T) = \mathbb{R}^3 = Sp\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \rangle$
- (2) (i) $N(T) = Sp\langle \mathbf{e}_3 \rangle$
- (ii) $R(T) = Sp\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle$
- (3) (i) $N(T) = Sp\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle$

$$(ii) R(T) = Sp\langle \mathbf{e}_1 \rangle$$

예제 1.11

생략.

예제 1.12

생략.

예제 1.13

- (i) $N(T)$ 의 기저 : $\{-2 + x, -4 + x^2\}$
- (ii) $rank(T) = 1$

예제 1.14

③

예제 1.15

③

예제 1.16

②

예제 1.17

③

예제 1.18

- (1) (i) $N(T)$ 의 기저 :
 $\{ \} \text{ \& } \dim(N(T)) = 0$
- (ii) $R(T)$ 의 기저 :
 $\{(1, 1, 0), (2, 0, 1), (0, -1, 2)\} \text{ \& } \dim(R(T)) = 3$
- (2) (i) $N(T)$ 의 기저 :
 $\{ \} \text{ \& } \dim(N(T)) = 0$
- (ii) $R(T)$ 의 기저 :
 $\{(1, 1), (1, -1)\} \text{ \& } \dim(R(T)) = 2$
- (3) (i) $N(T)$ 의 기저 :
 $\{(-1, 1, 1)\} \text{ \& } \dim(N(T)) = 1$
- (ii) $R(T)$ 의 기저 :
 $\{(1, 0), (1, 1)\} \text{ \& } \dim(R(T)) = 2$

예제 1.19

①

4.2 선형변환과 행렬

예제 2.1

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

예제 2.2

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

예제 2.3

$$T(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} x_1 - x_2 + 2x_3 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 \end{bmatrix}$$

예제 2.4

③

예제 2.5

$$[T]_{B,C} = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 4 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

예제 2.6

$$[T]_B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

예제 2.7

$$[T]_{B,C} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 8 & 15 \\ 5 & 9 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

예제 2.8

$$(1) [T]_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(2) T(\mathbf{v}) = (1, 1, -2)$$

예제 2.9

$$(1) (S \circ T)(x_1, x_2, x_3) = \begin{bmatrix} 3x_1 - 14x_2 + 4x_3 \\ x_1 + 2x_2 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 \end{bmatrix}^t$$

$$(2) \begin{bmatrix} 3 & -14 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

예제 2.10

④

예제 2.11

$$[L]_B = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

예제 2.12

①

예제 2.13

③

예제 2.14

④

예제 2.15

①

예제 2.16

④

예제 2.17

②

예제 2.18

③

예제 2.19

①

예제 2.20

①

예제 2.21

①

예제 2.22

①

생략.

예제 2.23

①

예제 2.24

$$12\sqrt{5}\pi$$

예제 2.25

③

예제 2.26

④

예제 2.27

③

예제 2.28

④

4.3기저의 변환과 행렬의 답음

예제 3.1

$$(1) P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(2) [r(x)]_C = \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

예제 3.2

$$(i) [T]_B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$(ii) [T]_C = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

예제 3.3

생략.

예제 3.4

05내적공간과 직교화 (Inner product space and Orthogonalization)

5.1내적공간

예제 1.1

내적이된다.

예제 1.2

내적이된다.

예제 1.3

생략.

예제 1.4

생략.

예제 1.5

(1) 수직이다.

$$(2) \|x + x^2\| = \frac{4}{\sqrt{15}}$$

예제 1.6

$$(1) \theta = \frac{\pi}{4}$$

$$(2) \text{Pr}_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(3) 서로 수직이다.

$$(4) \|\mathbf{x}\| = 2, \|\text{Pr}_{\mathbf{y}}(\mathbf{x})\| = \sqrt{2},$$

$$\|\mathbf{x} - \text{Pr}_{\mathbf{y}}(\mathbf{x})\| = \sqrt{2} \\ \Rightarrow \|\mathbf{x} - \text{Pr}_{\mathbf{y}}(\mathbf{x})\|^2 + \|\text{Pr}_{\mathbf{y}}(\mathbf{x})\|^2 = 4 = \|\mathbf{x}\|^2$$

예제 1.7

$$\{(0, -1, 1, 0), (-2, -3, 0, 1)\}$$

예제 1.8

생략.

예제 1.9

생략.

예제 1.10

$$\pm \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}} \right)$$

예제 1.11

$$(1) W^\perp = \text{Sp}\langle (1, -1, 3) \rangle$$

$$(2) W^\perp = \text{Sp}\langle (1, 1, 0), (0, 0, 1) \rangle$$

$$(3) W^\perp = \text{Sp}\langle (-1, 0, 0, 1), (0, 0, -1, 0) \rangle$$

예제 1.12

(1)

$$T^*(\mathbf{y}) = (2y_1 + 3y_2 + 2y_3, y_1 - 3y_3, -4y_2 - 3y_3)$$

$$(2) [T] = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -4 \\ 2 & -3 & -3 \end{bmatrix} = A,$$

$$[T^*] = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & -4 & -3 \end{bmatrix} = A^t$$

$$(3) (i) N(T) = N(A) = \{\vec{0}\}$$

$$(ii) R(T) = R(A) = \text{Col}(A) = \mathbb{R}^3$$

$$(iii) N(T^*) = N(A^t) = R(A)^\perp = \{\vec{0}\}$$

$$(iv) R(T^*) = R(A^t) = \text{Col}(A^t) = N(A)^\perp = \mathbb{R}^3$$

예제 1.13

$$(1) (i) N(A) = \text{Sp}\left\langle \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\rangle$$

$$(ii) R(A) = \text{Col}(A) = \text{Sp}\left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right\rangle$$

$$(iii) N(A^t) = \text{Sp}\left\langle \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

$$(iv) R(A^t) = \text{Col}(A^t) = \text{Sp}\left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

$$(2) (i) N(A) = \text{Sp}\left\langle \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

$$(ii) R(A) = \text{Col}(A) = \text{Sp}\left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

$$(iii) N(A^t) = \{\vec{0}\}$$

$$(iv) R(A^t) = Col(A^t) = Sp\left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

예제 1.14

②

예제 1.15

③

예제 1.16

②

예제 1.17

④

5.2 직교성과 그람-슈미트 직교화 과정**예제 2.1**

$$\left\{ (0, 1, 0), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right\}$$

예제 2.2

$$N(A) = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\mathbf{x} = \vec{0} \} \Rightarrow \dim(N(A)) \leq n$$

예제 2.3

$$\mathbf{v}_3 = (1, 0, 0, 1), \mathbf{v}_4 = (0, 1, 1, 0) \\ \Rightarrow \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{v}_1, \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{v}_2, \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{v}_3, \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{v}_4 \right\}$$

예제 2.4

$$(1) W = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid -3x + 4z = 0 \} \\ (2) \mathbf{v}_3 = \left(-\frac{3}{5}, 0, \frac{4}{5} \right) \Rightarrow W^\perp = Sp\langle \mathbf{v}_3 \rangle, \\ \mathbf{w} = \frac{65}{7}\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \frac{75}{7}\mathbf{v}_3$$

예제 2.5

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1), \frac{1}{\sqrt{6}}(-2, 1, 1), \frac{1}{\sqrt{2}}(0, -1, 1) \right\}$$

예제 2.6

$$(1) \left\{ \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \right\} \\ (2) \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \right\}$$

예제 2.7

$$(1) \mathbf{v}_3 = (-2, 2, 1) \Rightarrow W^\perp = Sp\langle \mathbf{v}_3 \rangle \\ (2) W \oplus W^\perp = \mathbb{R}^3 \\ (3) P\mathbf{x} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 4 & -4 & -2 \\ -4 & 4 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

예제 2.8

$$(1) \text{생략.} \\ (2) \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{6}}{2}x, \frac{3\sqrt{10}}{4}x^2 - \frac{\sqrt{10}}{4}, \frac{5\sqrt{14}}{4}\left(x^3 - \frac{3}{5}x\right) \right\}$$

예제 2.9

②

예제 2.10

⑤ 12

5.3 최소제곱문제**예제 3.1**

$$p_1(x) = -\frac{15}{26} + \frac{51}{26}x$$

예제 3.2

$$p_2(x) = 0.06452 + 2.6612x - 0.75806x^2$$

예제 3.3

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{6} \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix}$$

예제 3.4

정답

$$x_1 = \frac{4}{7}, x_2 = \frac{3}{7}$$

예제 3.5

③

예제 3.6

①

06고윳값과 대각화

(Eigenvalue & Diagonalization)

6.1고윳값과 고유벡터

예제 1.1

(1) (i) 고윳값 : $\lambda_1 = 4, \lambda_2 = -3$

(ii) 고유벡터 : $\mathbf{x}_{\lambda_1} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_{\lambda_2} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$

(iii) 고유공간 :

$$E_{\lambda_1} = Sp\left\langle \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle, E_{\lambda_2} = Sp\left\langle \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\rangle$$

(iv) 대수적중복도 : $M_{\lambda_1} = M_{\lambda_2} = 1$

(v) 기하적중복도 : $m_{\lambda_1} = m_{\lambda_2} = 1$

(2) (i) 고윳값 : $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = \lambda_3 = 1$

(ii) 고유벡터 : $\mathbf{x}_{\lambda_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_{\lambda_2} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

(iii) 고유공간 :

$$E_{\lambda_1} = Sp\left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle, E_{\lambda_2} = Sp\left\langle \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

(iv) 대수적중복도 : $M_{\lambda_1} = 1, M_{\lambda_2} = 2$

(v) 기하적중복도 : $m_{\lambda_1} = 1, m_{\lambda_2} = 2$

(3) (i) 고윳값 : $\lambda_1 = 1 + 2i, \lambda_2 = 1 - 2i$

(ii) 고유벡터 : $\mathbf{x}_{\lambda_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}, \mathbf{x}_{\lambda_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$

(iii) 고유공간 : $E_{\lambda_1} = Sp\left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} \right\rangle, E_{\lambda_2} = Sp\left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} \right\rangle$

(iv) 대수적중복도 : $M_{\lambda_1} = M_{\lambda_2} = 1$

(v) 기하적중복도 : $m_{\lambda_1} = m_{\lambda_2} = 1$

(4) (i) 고윳값 : $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$

(ii) 고유벡터 :

$$\mathbf{x}_{\lambda_1} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_{\lambda_2} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_{\lambda_3} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

(iii) 고유공간 :

$$E_{\lambda_1} = Sp\left\langle \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\rangle, E_{\lambda_2} = Sp\left\langle \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} \right\rangle,$$

$$E_{\lambda_3} = Sp\left\langle \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} \right\rangle$$

(iv) 대수적중복도 : $M_{\lambda_1} = M_{\lambda_2} = M_{\lambda_3} = 1$

(v) 기하적중복도 : $m_{\lambda_1} = m_{\lambda_2} = m_{\lambda_3} = 1$

예제 1.2

(i) 고윳값 : $\lambda_1 = 5, \lambda_2 = \lambda_3 = -3$

$$\Rightarrow \lambda(A) = \{-3, 5\}$$

(ii) 고유공간 :

$$E_{\lambda_1} = Sp\left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \right\rangle, E_{\lambda_2} = Sp\left\langle \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

예제 1.3

(i) 고윳값 :

$$\lambda_1 = i, \lambda_2 = -i \Rightarrow \lambda(A) = \{i, -i\}$$

(ii) $\rho(A) = 1$

(iii) 고유공간 : $E_{\lambda_1} = Sp\left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} \right\rangle, E_{\lambda_2} = Sp\left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} \right\rangle$

예제 1.4

생략.

예제 1.5

$$\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 6$$

예제 1.6

생략.

예제 1.7

생략.

예제 1.8

(i) 고윳값 : $\lambda - \alpha$

(ii) 고유벡터 : $\mathbf{x}_{\lambda}$

예제 1.9

(i) 고윳값은 같다.

$$\because \det(A - \lambda I_n) = \det((A - \alpha I_n)^t) = \det(A^t - \alpha I_n)$$

(ii) 고유벡터는 반드시 같지 않다.

$$(\text{반례}) A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, A^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

예제 1.10

(1)

$$|\lambda| = |\lambda| \| \mathbf{x} \| = \| \lambda \mathbf{x} \| = \| Q \mathbf{x} \| = \| \mathbf{x} \| = 1$$

$$\left(\begin{array}{ccc} & & \\ & 2 & \\ & & \end{array} \right)$$

$$QQ^t = I_n \Rightarrow \det(QQ^t) = 1 \Rightarrow |\det(Q)| = 1$$

예제 1.11

생략.

예제 1.12

생략.

예제 1.13

(1) (i) 고윳값: $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$

(ii) 고유공간 :

$$E_{\lambda_1} = Sp \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle, E_{\lambda_2} = Sp \left\langle \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ 8 \end{bmatrix} \right\rangle,$$

$$E_{\lambda_3} = Sp \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

(2) (i) 고윳값: $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \frac{1}{2}, \lambda_3 = \frac{1}{3}$

(ii) 고유공간 :

$$E_{\lambda_1} = Sp \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle, E_{\lambda_2} = Sp \left\langle \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ 8 \end{bmatrix} \right\rangle,$$

$$E_{\lambda_3} = Sp \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

(3) (i) 고윳값: $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 1$

(ii) 고유공간 :

$$E_{\lambda_1} = Sp \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle, E_{\lambda_2} = Sp \left\langle \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ 8 \end{bmatrix} \right\rangle,$$

$$E_{\lambda_3} = Sp \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

(4) (i) 고윳값: $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 0$

(ii) 고유공간 :

$$E_{\lambda_1} = Sp \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle, E_{\lambda_2} = Sp \left\langle \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ 8 \end{bmatrix} \right\rangle,$$

$$E_{\lambda_3} = Sp \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

예제 1.14

$$(1) A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

(2) 고윳값: $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 4$

$$\Rightarrow \lambda(A) = \{1, 2, 4\}, \rho(A) = 4$$

$$(3) E_{\lambda_1} = Sp \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle = \{k \mid k \in \mathbb{R}\},$$

$$E_{\lambda_2} = Sp \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle = \{t(1+x) \mid t \in \mathbb{R}\},$$

$$E_{\lambda_3} = Sp \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle = \{t(1+2x+x^2) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

예제 1.15

$$\begin{bmatrix} -3 + 2^{2018} \\ 3 + 2^{2019} \end{bmatrix}$$

예제 1.16

(1) 아니오.

(2) 아니오.

(3) 생략.

예제 1.17

생략.

예제 1.18

③

예제 1.19

④

예제 1.20

$$k = 4$$

예제 1.21

④ 12

예제 1.22

①

예제 1.23

④

①

예제 1.24

②

예제 1.25

①

예제 1.26

③

예제 1.27

③

예제 1.28

①

예제 1.29

③

예제 1.30

①

예제 1.31

①

예제 1.32

④

예제 1.33

④

예제 1.34

④

예제 1.35

②

예제 1.36

④

예제 1.37

6.2행렬의 대각화

예제 2.1

생략.

예제 2.2

생략.

예제 2.3

생략.

예제 2.4

(반례) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

예제 2.5

생략.

예제 2.6

생략.

예제 2.7

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A = PDP^{-1}$$

예제 2.8

대각화 가능하지 않다.

예제 2.9

$$(i) A = [T]_B = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

(단, $B : \mathbb{R}^3$ 의 표준기저)

$$(ii) P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A = PDP^{-1}$$

예제 2.10

- (1) $k \neq 1$ 인 실수.
- (2) $k = 0$
- (3) $k = 0$
- (4) $k \in \mathbb{R}$

예제 2.11

$$(1) P = \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ 10 & -3 \end{bmatrix}$$

$$(2) P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & 1 \\ -\frac{5}{2} & -\frac{3}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

예제 2.12

④

예제 2.13

④

예제 2.14

③

예제 2.15

②

예제 2.16

⑤

예제 2.17

③

예제 2.18

②

예제 2.19

$$a = 1, b = -2$$

예제 2.20

생략.

예제 2.21

생략.

예제 2.22

생략.

예제 2.23

$$P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} -7 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow P^t A P = D$$

예제 2.24

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow P^t A P = D$$

예제 2.25

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A = P D P^t$$

예제 2.26

$$P = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A = P D P^t = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -1 & 12 \\ 12 & 6 \end{bmatrix}$$

예제 2.27

$$P = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{42}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{14}} \\ \frac{5}{\sqrt{42}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{14}} \\ -\frac{1}{\sqrt{42}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{3}{\sqrt{14}} \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \Rightarrow A = PDP^t$$

예제 2.28

③

예제 2.29

②

예제 2.30

④

예제 2.31

③

예제 2.32

①

예제 2.33

④

예제 2.34

①

예제 2.35

$$(1) A^{10} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 + 2^{20} & -2 + 2^{21} \\ -1 + 2^{20} & 1 + 2^{21} \end{bmatrix}$$

$$(2) \begin{bmatrix} 2 + 3 \cdot 2^{20} \\ -1 + 3 \cdot 2^{20} \end{bmatrix}$$

예제 2.36

$$(1) \begin{bmatrix} -245 & 488 \\ -244 & 487 \end{bmatrix}$$

$$(2) \begin{bmatrix} -\frac{182}{243} & -\frac{61}{81} \\ \frac{243}{61} & -\frac{20}{81} \end{bmatrix}$$

$$(3) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}^{2002} = I_3$$

$$(4) P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -4 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, P^{-1} = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 5 & 0 & -5 \\ 4 & 2 & 4 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow A^k = PD^kP^{-1}$$

예제 2.37

1 : 2

예제 2.38

$$(1) \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$(2) (i) k : \text{짝수} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$(ii) k : \text{홀수} \Rightarrow \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

예제 2.39

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1}$$

예제 2.40

$$(1) x_n = 3^n - 2^n \quad (n \geq 1)$$

$$(2) x_n = \frac{1}{6} [3 \cdot 5^n - (-1)^n \cdot 21] \quad (n \geq 1)$$

예제 2.41

②

예제 2.42

2

예제 2.43

①

예제 2.44

①

예제 2.45

①

예제 2.46

④

예제 2.47

④

예제 2.48

③

예제 2.49

②

예제 2.50

②

예제 2.51

④

예제 2.52

②

예제 2.53

①

예제 2.54

④

예제 2.55

생략.

예제 2.56

생략.

예제 2.57

$$(1) e^A = \begin{bmatrix} 2e^2 - e^3 & 2e^2 - 2e^3 \\ -e^2 + e^3 & -e^2 + 2e^3 \end{bmatrix}$$

$$(2) e^A = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} e^2 + e^4 & -e^2 + e^4 \\ -e^2 + e^4 & e^2 + e^4 \end{bmatrix}$$

$$(3) e^A = I_3 + A + \frac{1}{2!} A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(4) e^A = \begin{bmatrix} e - e^2 & -e & e - 2e^2 \\ -e + e^2 & e^2 & -e + e^2 \\ -e + e^2 & 0 & -e + e^2 \end{bmatrix}$$

예제 2.58

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2e^{2t} + 2e^{3t} \\ -e^{2t} - 2e^{3t} \end{bmatrix}$$

6.3이차형식

예제 3.1

$$(1) \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$(2) \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$(3) \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$(4) \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$(5) \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 3 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$(6) \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -\frac{5}{2} & 0 \\ -\frac{5}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

예제 3.2

(1) (i) 최댓값 : 3

(ii) 최솟값 : -1

(2) (i) 최댓값 : $\frac{5 + \sqrt{2}}{2}$

(ii) 최솟값 : $\frac{5 - \sqrt{2}}{2}$

(3) (i) 최댓값 : $\frac{7}{2}$

(ii) 최솟값 : $\frac{1}{2}$

예제 3.3

(1) (i) 최댓값 : 3

(ii) 최솟값 : 0

(2) (i) 최댓값 : 4

(ii) 최솟값 : 2

예제 3.4

(1) $q(y_1, y_2) = 6y_1^2 + y_2^2$

(2) $q(y_1, y_2, y_3) = -3y_2^2 + 3y_3^2$

예제 3.5

②

예제 3.6

②

예제 3.7

③

예제 3.8

③

예제 3.9

①

예제 3.10

②

예제 3.11

타원(Ellipse).

예제 3.12

타원(Ellipse).

예제 3.13

타원면(Ellipsoid).

예제 3.14

②

예제 3.15

②

6.4양의 정부호 행렬과 촐레스키 분해

예제 4.1

$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$ 일 때,

$$\mathbf{x}^t A \mathbf{x} = x_1^2 + (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + x_3^2 > 0$$

예제 4.2

양의 정부호.

예제 4.3

④

예제 4.4

(1) $k > 4$

(2) $k > 2$

예제 4.5

$x = 2, y = 0, z = 1$

07복소벡터공간 (Complex vector space)

7.1복소벡터공간과 유니타리 공간

예제 1.1

- (i) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 11 - 3i$
 (ii) $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = \sqrt{23}$

예제 1.2

- (1) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = -1$
 (2) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 27$

예제 1.3

- (1) $\langle \mathbf{z}, \mathbf{u}_1 \rangle = 3 - 2i, \langle \mathbf{z}, \mathbf{u}_2 \rangle = 2 + 5i,$
 $\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{z} \rangle = 3 + 2i, \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{z} \rangle = 2 - 5i$
 (2) $\|\mathbf{z}\| = \sqrt{42}$

예제 1.4

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{3}}(i, i, i), \frac{1}{\sqrt{6}}(-2i, i, i), \frac{1}{\sqrt{2}}(0, -i, i) \right\}$$

예제 1.5

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(i, 1, 0, 0), \frac{1}{\sqrt{6}}(i, -1, 2, 0), \frac{1}{\sqrt{12}}(i, -1, -1, 3) \right\}$$

예제 1.6

- (1) $k = \frac{4}{3}i$
 (2) 존재하지 않는다.

7.2복소행렬

예제 2.1

- (1) $A^* = \begin{bmatrix} 1+i & 5 \\ 3 & 2-3i \\ 7i & 4 \end{bmatrix}$
 (2) $B^* = \begin{bmatrix} 1 & 2+i \\ 2-i & 3 \end{bmatrix}$
 (3) $C^* = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$

$$(4) D^* = \begin{bmatrix} 2i & 1-i & -1+i \\ 1+i & 0 & 3 \\ -1-i & 3 & -3i \end{bmatrix}$$

예제 2.2

생략.

예제 2.3

- (i) $A^* = \begin{bmatrix} 3 & 2-i \\ 2+i & 4 \end{bmatrix} = A \Rightarrow A : \text{에르미트 행렬}$
 (ii) 고윳값 : $\lambda_1 = \frac{7+\sqrt{21}}{2}, \lambda_2 = \frac{7-\sqrt{21}}{2}$
 (iii) 고유벡터 :
 $\mathbf{x}_{\lambda_1} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{21}-1}{10}(2-i) \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_{\lambda_2} = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{21}-1}{10}(2-i) \\ 1 \end{bmatrix}$

예제 2.4

- (ii) 고윳값 : $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 4$
 (iii) 고유벡터 :

$$\mathbf{x}_{\lambda_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ i \end{bmatrix}, \mathbf{x}_{\lambda_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ i \\ 1 \end{bmatrix}$$

예제 2.5

- (i) $A^* = A$ &
 (ii) $\|A^{(1)}\| = \|A^{(2)}\| = 1, A^{(1)} \cdot A^{(2)} = 0$

예제 2.6

②

예제 2.7

②

예제 2.8

$$U = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$$

예제 2.9

$$U = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1-i & -1 \\ 1 & 1+i \end{bmatrix}$$

예제 2.10

$$U = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1-2i & 1 \\ 1 & -1-2i \end{bmatrix}$$

예제 2.11

$$(i) AA^* = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = A^*A \Rightarrow A : \text{정규행렬}$$

$$(ii) U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow U^*AU = \begin{bmatrix} 1+i & 0 \\ 0 & 1-i \end{bmatrix} = D$$

예제 2.12

①

7.3행렬의 특이값분해**예제 3.1**

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

예제 3.2

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

예제 3.3

②