

PART

+

—

×

÷

08

푸리에 급수와 변환 (Fourier Series & Transformations)

8.1 주기가 2π 인 함수의 푸리에 급수
(Fourier Series of periodic function with period 2π)

8.2 주기가 p 인 함수의 푸리에 급수
(Fourier Series of periodic function with period p)

8.3 푸리에 사인 및 코사인 급수
(Fourier Sine and Cosine Series)

8.4 복소수형 푸리에 급수
(Fourier Series with Complex Form)

8.5 푸리에 적분(Fourier Integral)

8.6 푸리에 변환(Fourier Transformation)

8.1 주기가 2π 인 주기함수의 푸리에 급수(Fourier Series)1. 주기가 2π 인 주기함수의 푸리에 급수(Fourier Series)

“미분적분학1”에서 배운 테일러 급수(Taylor Series)는 주어진 함수 f 를 다항함수(polynomials)의 무한 합(infinite series)으로 표현하는 것이다. 하지만 주어진 함수 f 좋지 못할 때(즉, 미분 불가능할 때)는 적용할 수가 없다. 따라서 함수가 미분 불가능하거나 불연속일 때는 다른 방법이 필요하다.

이것을 해결할 방법의 하나로 푸리에 급수(Fourier Series)가 있다. 푸리에 급수(Fourier Series)는 주기가 p 인 주기함수(periodic function)를 주파수가 서로 다른 사인함수(sine function)와 코사인함수(cosine function)의 무한급수(infinite series) 형태

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)]$$

로 나타내는 것을 말한다.

주기가 2π 인 주기함수의 푸리에 급수(Fourier series)는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)] \\ &= a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos(2x) + b_2 \sin(2x) + \dots \end{aligned}$$

[참고] (i) a_0, a_n, b_n : 함수 f 의 푸리에 계수(Fourier's coefficients)라고 하고 다음과 같이 계산된다.

$$\textcircled{1} a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \quad \textcircled{2} a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx \quad (n = 1, 2, \dots)$$

$$\textcircled{3} b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx \quad (n = 1, 2, \dots)$$

(ii) $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)]$ 로 표현하기도 한다. 이때 계수는 다음과 같다.

$$\textcircled{1} a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \quad \textcircled{2} a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx \quad (n = 1, 2, \dots)$$

$$\textcircled{3} b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx \quad (n = 1, 2, \dots)$$

2. 푸리에 급수의 수렴과 합(Convergence and Sums of Fourier Series)

주기가 2π 인 주기함수(periodic function) $f(x)$ 가 구간 $-\pi \leq x \leq \pi$ 에서 조각연속(또는 구분연속, piecewise continuous)이고 이 구간의 각 점에서 **좌도함수**와 **우도함수**를 갖는다면, $f(x)$ 의 푸리에 급수

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)]$$

는 수렴하고 $f(x)$ 의 불연속점들을 제외하고 급수의 합은 $f(x)$ 이다.

또한, 불연속인 점 x_0 에서 이 급수의 합은 $f(x)$ 의 좌 극한값과 우 극한값의 산술평균이다.

[참고] ① x_0 에서 함수 f 의 **좌 극한값**과 **우 극한값**을 다음과 같이 정의한다.

$$f_-(x_0) = f(x_0 - 0) := \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0^+} f(x_0 - h) : \text{좌 극한값}$$

$$f_+(x_0) = f(x_0 + 0) := \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0^+} f(x_0 + h) : \text{우 극한값}$$

② x_0 에서 함수 f 의 **좌도함수**와 **우도함수**를 다음과 같이 정의한다.

$$f'_-(x_0) := \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} : \text{좌도함수}$$

$$f'_+(x_0) := \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} : \text{우도함수}$$

개념 및 내용 설명

예제 1.1 【사각파: Rectangular Wave】 주기가 2π 인 주기함수 $f(x)$ 를 푸리에 급수(Fourier series)로 나타내어라.

$$f(x) = \begin{cases} k & (0 < x < \pi) \\ -k & (-\pi < x < 0) \end{cases}$$

예제 1.2 주기가 2π 인 주기함수 $f(x)$ 를 푸리에 급수(Fourier series)로 나타내어라.

$$f(x) = \begin{cases} \pi - x & (0 < x < \pi) \\ 0 & (-\pi < x < 0) \end{cases}$$

예제 1.3 주기가 2π 인 주기함수 $f(x) = \begin{cases} k & , \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right) \\ 0 & , \left(\frac{\pi}{2} < x < \frac{3}{2}\pi\right) \end{cases}$ 에 대해 아래 물음에 답하여라.

- (1) $f(x)$ 의 푸리에 급수(Fourier series)를 구하여라.
- (2) (1)의 사실을 이용하여 무한급수 $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$ 의 값을 구하여라.

예제 1.4 주기가 2π 인 함수 $f(x) = \begin{cases} 0 & , (-\pi < x < 0) \\ 1 & , (0 < x < \pi) \end{cases}$ 의 Fourier 급수는?(중앙대 공대 2014)

- ① $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \left[\cos(x) + \frac{1}{9} \cos(3x) + \frac{1}{25} \cos(5x) + \dots \right]$ ② $\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \left[\sin(x) + \frac{1}{3} \sin(3x) + \frac{1}{5} \sin(5x) + \dots \right]$
 ③ $\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \left[\sin(x) + \frac{1}{2} \sin(3x) + \frac{1}{3} \sin(5x) + \dots \right]$ ④ $\frac{\pi^2}{3} - 4 \left[\cos(x) - \frac{1}{4} \cos(2x) + \frac{1}{9} \cos(3x) + \dots \right]$

예제 1.5 주기가 2π 인 함수 $f(x) = \begin{cases} \pi + x & , -\pi < x < 0 \\ \pi - x & , 0 < x < \pi \end{cases}$ 의 Fourier 급수를 이용하여,

무한급수 $1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \dots$ 의 값을 구하면?(중앙대 공대 2014)

- ① $\frac{\pi^2}{8}$ ② $\frac{\pi^4}{90}$ ③ $\frac{\pi^4}{96}$ ④ $\frac{\pi^2}{8\sqrt{2}}$

예제 1.6 주기가 2π 인 함수 $f(x) = \begin{cases} x - 1 & , -\pi < x < 0 \\ x + 1 & , 0 \leq x < \pi \end{cases}$ 의 Fourier 급수는?(중앙대 공대 2015)

- ① $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2(\pi+1)}{n\pi} (-1)^{n+1} - \frac{2}{n\pi} \right) \cos nx$ ② $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2(\pi+1)}{n\pi} (-1)^{n+1} - \frac{2}{n\pi} \right) \sin nx$
 ③ $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2(\pi+1)}{n\pi} (-1)^{n+1} + \frac{2}{n\pi} \right) \cos nx$ ④ $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2(\pi+1)}{n\pi} (-1)^{n+1} + \frac{2}{n\pi} \right) \sin nx$

예제 1.7 다음과 같이 정의된 주기가 2π 인 주기함수

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , (-\pi \leq x < 0) \\ 2 & , (0 \leq x < \pi) \end{cases}$$

의 푸리에 급수 $f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)]$ 에 $a_3 + b_3$ 의 값을 구하시오. (홍익대 2015)

① $\frac{1}{3\pi}$

② $\frac{2}{3\pi}$

③ $\frac{1}{\pi}$

④ $\frac{4}{3\pi}$

예제 1.8 주기가 2π 인 함수 $f(x) = \begin{cases} 0 & , (-\pi < x < 0) \\ \sin x & , (0 \leq x < \pi) \end{cases}$ 의 푸리에(Fourier) 급수를 이용하여, 아래 식의 값을 구하면? (중앙대 공대 2016)

$$1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)(2n-1)}$$

① $\frac{\pi}{2}$

② $\frac{\pi}{4}$

③ $\frac{\pi}{8}$

④ $\frac{\pi}{16}$

8.2 주기가 p 인 주기함수의 푸리에(Fourier) 급수

1. 주기가 p 인 주기함수의 푸리에(Fourier) 급수

주기가 p 인 주기함수(periodic function) $f(x)$ 의 푸리에 급수(Fourier series)는 다음과 같다.

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{2n\pi}{p}x\right) + b_n \sin\left(\frac{2n\pi}{p}x\right) \right]$$

[참고] (i) a_0, a_n, b_n : 함수 f 의 푸리에 계수(Fourier's coefficients)라고 하고 다음과 같이 계산된다.

$$\textcircled{1} a_0 = \frac{1}{p} \int_{-\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}} f(x) dx \quad \textcircled{2} a_n = \frac{2}{p} \int_{-\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}} f(x) \cos\left(\frac{2n\pi}{p}x\right) dx \quad (n = 1, 2, \dots)$$

$$\textcircled{3} b_n = \frac{2}{p} \int_{-\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}} f(x) \sin\left(\frac{2n\pi}{p}x\right) dx \quad (n = 1, 2, \dots)$$

(ii) 주기가 $2L$ 인 함수 $f(x)$ 의 푸리에 급수와 푸리에 계수는 다음과 같다.

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \right]$$

$$\textcircled{1} a_0 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) dx \quad \textcircled{2} a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx \quad (n = 1, 2, \dots)$$

$$\textcircled{3} b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx \quad (n = 1, 2, \dots)$$

2. 홀함수(기함수, odd function)의 푸리에(Fourier) 급수

푸리에 급수(Fourier series)는 상수와 코사인함수로 구성된 짝함수(even function)와 사인함수로 구성된 홀함수(odd function)의 합의 형태로 나타나기 때문에, 만일 주어진 주기함수가 짝함수 또는 홀함수인 경우 푸리에 급수의 계산이 매우 간단하게 표현된다.

주기가 p 이고 홀함수(odd function)인 주기함수(periodic function) $f(x)$ 의 푸리에 급수(Fourier series)는 다음과 같다.

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[b_n \sin\left(\frac{2n\pi}{p}x\right) \right]$$

[참고] ① b_n : 홀함수 f 의 푸리에 계수(Fourier's coefficients)라고 하고 다음과 같이 계산된다.

$$b_n = \frac{4}{p} \int_0^{\frac{p}{2}} f(x) \sin\left(\frac{2n\pi}{p}x\right) dx \quad (n = 1, 2, \dots)$$

② 주기가 $2L$ 인 홀함수 $f(x)$ 의 푸리에 급수와 푸리에 계수는 다음과 같다.

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \right]$$

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx \quad (n = 1, 2, \dots)$$

3. 짝함수(우함수, even function)의 푸리에(Fourier) 급수

주기가 p 이고 짝함수(even function)인 주기함수(periodic function) $f(x)$ 의 푸리에 급수(Fourier series)는 다음과 같다.

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{2n\pi}{p}x\right) \right]$$

[참고] ① a_0, a_n : 짝함수 f 의 푸리에 계수(Fourier's coefficients)라고 하고 다음과 같이 계산된다.

$$a_0 = \frac{2}{p} \int_0^{\frac{p}{2}} f(x) dx, \quad a_n = \frac{4}{p} \int_0^{\frac{p}{2}} f(x) \cos\left(\frac{2n\pi}{p}x\right) dx \quad (n = 1, 2, \dots)$$

② 주기가 $2L$ 인 짝함수 $f(x)$ 의 푸리에 급수와 푸리에 계수는 다음과 같다.

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \right]$$

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_0^L f(x) dx, \quad a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx \quad (n = 1, 2, \dots)$$

개념 및 내용 설명

예제 2.1 주기가 $p = 2$ 인 주기함수 $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < 1 \\ -1, & -1 < x < 0 \end{cases}$ 의 푸리에 급수(Fourier series)를 구하여라.

예제 2.2 주기가 $p = 4$ 인 다음 주기함수 $f(x)$ 의 푸리에 급수(Fourier series)를 구하여라.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 1 < x < 2 \\ a, & -1 < x < 1 \\ 0, & -2 < x < -1 \end{cases}$$

예제 2.3 【반파 정류기: Half-Wave Rectifier】 전압파의 음의 부분을 자르는 반파 정류기(half-wave rectifier)를 통해 사인파 전압 $E \sin(\omega t)$ (t : 시간)를 가할 때 그 결과로 생기는 주기가 p 인 주기함수

$$u(t) = \begin{cases} 0, & (-L < t < 0) \\ E \sin(\omega t), & (0 < t < L) \end{cases}, \quad p = \frac{2\pi}{\omega}$$

의 푸리에 급수(Fourier series)를 구하여라.

예제 2.4 【파세발 항등식: Parseval's Identity】 주기가 p 인 $f(x)$ 의 푸리에 급수(Fourier series)가 다음과 같다

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{2n\pi}{p}x\right) + b_n \sin\left(\frac{2n\pi}{p}x\right) \right]$$

$f(x)$ 를 위의 식에 곱하여 한 주기 동안 적분함으로써 다음의 관계인 **파세발 항등식**이 성립함을 보여라.

$$\frac{1}{p} \int_0^p [f(x)]^2 dx = a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} [a_n^2 + b_n^2]$$

예제 2.5 【톱니파: Sawtooth Wave】 아래 주어진 함수 $f(x)$ 의 푸리에 급수(Fourier series)를 구하여라.

$$f(x) = x + \pi \quad (-\pi < x < \pi) \text{ \& } f(x + 2\pi) = f(x)$$

예제 2.6 $f(x) = x^2 \quad (-\pi \leq x \leq \pi)$ 의 푸리에 급수(Fourier series)를 이용하여 $1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \dots$ 의 값을 구하여라.

예제 2.7 주기가 4인 함수 $f(x)$ 를 다음과 같이 정의하자.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , (-2 < x < 0) \\ x & , (0 \leq x \leq 1) \\ 1 & , (1 \leq x < 2) \end{cases}$$

이때, $f(x)$ 를 아래와 같이 푸리에(Fourier) 급수로 나타낼 때 b_n ($n \geq 1$)을 바르게 나타낸 것은?(중앙대 공대 2016)

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi}{2}x\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{2}x\right) \right]$$

① $\frac{2}{n^2\pi^2} \left[\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{n\pi}{2}(-1)^n \right]$

② $\frac{2}{n^2\pi^2} \left[\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{n\pi}{2}(-1)^n \right]$

③ $\frac{2}{n^2\pi^2} \left[\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{n\pi}{2}(-1)^{n+1} \right]$

④ $\frac{2}{n^2\pi^2} \left[\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{n\pi}{2}(-1)^{n+1} \right]$

8.3 푸리에 사인 및 코사인 급수

1. 푸리에 사인 급수(Fourier Sine Series)

주기가 p 이고 홀함수(기함수)인 주기함수(periodic function) $f(x)$ 의 푸리에 급수(Fourier series)를 푸리에 사인 급수(Fourier sine series)라고 하고 다음과 같다.

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{2n\pi}{p}x\right) + b_n \sin\left(\frac{2n\pi}{p}x\right) \right] = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{2n\pi}{p}x\right)$$

[참고] a_0, a_n, b_n : 함수 f 의 푸리에 계수(Fourier's coefficients)라고 하고 다음과 같이 계산된다.

$$\textcircled{1} a_0 = \frac{1}{p} \int_{-\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}} f(x) dx = 0$$

$$\textcircled{2} a_n = \frac{2}{p} \int_{-\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}} f(x) \cos\left(\frac{2n\pi}{p}x\right) dx = 0 \quad (n = 1, 2, \dots)$$

$$\textcircled{3} b_n = \frac{2}{p} \int_{-\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}} f(x) \sin\left(\frac{2n\pi}{p}x\right) dx = \frac{4}{p} \int_0^{\frac{p}{2}} f(x) \sin\left(\frac{2n\pi}{p}x\right) dx \quad (n = 1, 2, \dots)$$

2. 푸리에 코사인 급수(Fourier Cosine Series)

주기가 p 이고 짝함수(우함수)인 주기함수(periodic function) $f(x)$ 의 푸리에 급수(Fourier series)를 푸리에 코사인 급수(Fourier cosine series)라고 하고 다음과 같다.

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{2n\pi}{p}x\right) + b_n \sin\left(\frac{2n\pi}{p}x\right) \right] = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2n\pi}{p}x\right)$$

[참고] a_0, a_n, b_n : 함수 f 의 푸리에 계수(Fourier's coefficients)라고 하고 다음과 같이 계산된다.

$$\textcircled{1} a_0 = \frac{1}{p} \int_{-\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}} f(x) dx = \frac{2}{p} \int_0^{\frac{p}{2}} f(x) dx$$

$$\textcircled{2} a_n = \frac{2}{p} \int_{-\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}} f(x) \cos\left(\frac{2n\pi}{p}x\right) dx = \frac{4}{p} \int_0^{\frac{p}{2}} f(x) \cos\left(\frac{2n\pi}{p}x\right) dx \quad (n = 1, 2, \dots)$$

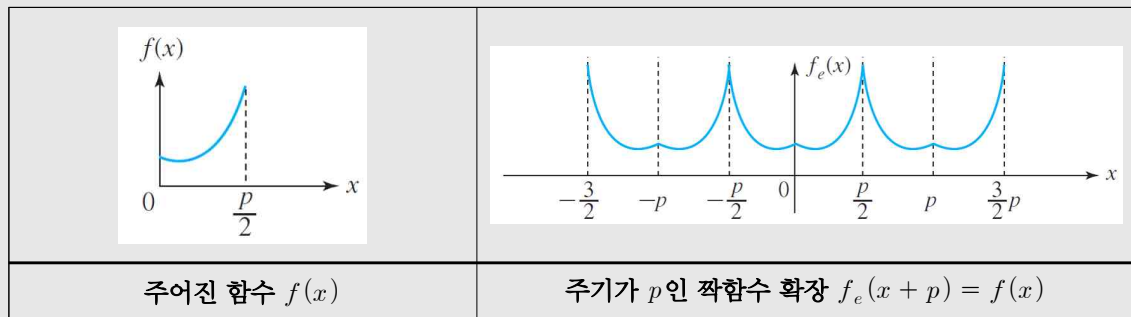
$$\textcircled{3} b_n = \frac{2}{p} \int_{-\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}} f(x) \sin\left(\frac{2n\pi}{p}x\right) dx = 0 \quad (n = 1, 2, \dots)$$

3. 반구간 전개(Half-Range Expansion)

지금까지 푸리에 급수(Fourier series)를 주기가 p 인 함수에 대해서 다루었으나, 여러 가지 공학적 응용에서 유한한 구간 $0 \leq x \leq \frac{p}{2}$ 에서만 정의된 함수 $f(x)$ 에 대한 푸리에 급수(Fourier series)를 사용해야 할 때, 이를 해결하기 위해 **반구간 전개**(Half-Range Expansion)라는 개념을 이용한다.

『**반구간 전개**(Half-Range Expansion)의 개념은 주어진 함수가 유한구간에서만 정의되어 있는 비주기함수(nonperiodic function)라고 할 때, 이것을 짝함수(우함수) 또는 홀함수(기함수) 형태의 주기함수로 확장함으로써 푸리에 급수(Fourier series)를 얻는 방법을 의미한다. 이렇게 하여 얻어진 푸리에 급수(Fourier series)를 $0 \leq x \leq \frac{p}{2}$ 구간에서만 사용하게 되면 주어진 함수 $f(x)$ 의 푸리에 급수(Fourier series) 표현이 된다.』

(1) 짝함수(우함수) 형태의 주기함수로의 확장



위 표는 구간 $\left[0, \frac{p}{2}\right]$ 에서 주어진 함수(비주기 함수) $f(x)$ 를 $\left[-\frac{p}{2}, \frac{p}{2}\right]$ 구간에서 짝함수(우함수) 형태로 확장하여 이것을 주기함수 형태로 새롭게 정의한 짝함수 $f_e(x)$ 의 그래프이다.

따라서 함수 $f_e(x)$ 는 주기가 p 인 짝함수(우함수)이므로 푸리에 코사인 급수(Fourier cosine series)로 다음과 같이 나타낸다.

$$f_e(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{2n\pi}{p}x\right) \right]$$

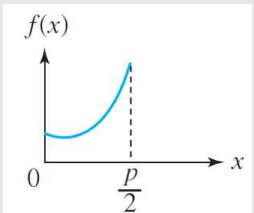
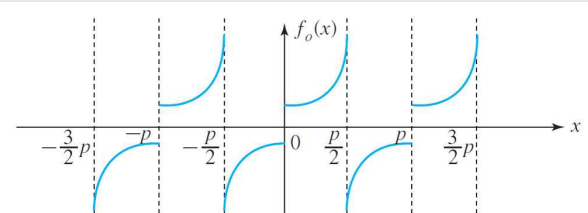
[참고] (i) a_0, a_n, b_n : 함수 f_e 의 푸리에 계수(Fourier's coefficients)라고 하고 다음과 같이 계산된다.

$$\textcircled{1} a_0 = \frac{1}{p} \int_{-\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}} f_e(x) dx = \frac{2}{p} \int_0^{\frac{p}{2}} f(x) dx$$

$$\textcircled{2} a_n = \frac{2}{p} \int_{-\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}} f_e(x) \cos\left(\frac{2n\pi}{p}x\right) dx = \frac{4}{p} \int_0^{\frac{p}{2}} f(x) \cos\left(\frac{2n\pi}{p}x\right) dx \quad (n = 1, 2, \dots)$$

$$\text{(ii)} f_e(x) = f(x), \quad 0 \leq x \leq \frac{p}{2}$$

(2) 홀함수(기함수) 형태의 주기함수로의 확장

	
주어진 함수 $f(x)$	주기가 p 인 홀함수 확장 $f_o(x+p) = f(x)$

위 표는 구간 $\left[0, \frac{p}{2}\right]$ 에서 주어진 함수(비주기 함수) $f(x)$ 를 $\left[-\frac{p}{2}, \frac{p}{2}\right]$ 구간에서 짝함수(우함수) 형태로 확장하여 이것을 주기함수 형태로 새롭게 정의한 홀함수 $f_o(x)$ 의 그래프이다.

따라서 함수 $f_o(x)$ 는 주기가 p 인 홀함수(기함수)이므로 푸리에 사인 급수(Fourier sine series)로 다음과 같이 나타난다.

$$f_o(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[b_n \sin\left(\frac{2n\pi}{p}x\right) \right]$$

[참고] ① b_n : 함수 f_o 의 푸리에 계수(Fourier's coefficients)라고 하고 다음과 같이 계산된다.

$$b_n = \frac{2}{p} \int_{-\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}} f_o(x) \sin\left(\frac{2n\pi}{p}x\right) dx = \frac{4}{p} \int_0^{\frac{p}{2}} f(x) \sin\left(\frac{2n\pi}{p}x\right) dx \quad (n = 1, 2, \dots)$$

$$\textcircled{2} f_o(x) = f(x), \quad 0 \leq x \leq \frac{p}{2}$$

개념 및 내용 설명

예제 3.1 주기가 $p = 4$ 인 함수 $f(x) = x$, $(-2 < x < 2)$ 를 사인 급수(sine series)로 나타내어라.

예제 3.2 주기가 $p = 10$ 인 함수 $f(x) = \begin{cases} 3, & 0 < x < 5 \\ -3, & -5 < x < 0 \end{cases}$ 를 사인 급수(sine series)로 나타내어라.

예제 3.3 주기가 $p = 6$ 인 함수 $f(x) = \begin{cases} 0, & 4 \leq x < 6 \\ 1, & 2 \leq x < 4 \\ 0, & 0 \leq x < 2 \end{cases}$ 를 코사인 급수(cosine series)로 나타내어라.

예제 3.4 함수 $f(x) = x$ ($0 < x < 1$)를 반구간 전개(half-range expansion)를 사용한 푸리에 급수(Fourier series)를 구하여라.

예제 3.5 $f(x) = x^2$ ($0 < x < 1$)를 반구간 전개(half-range expansion)를 사용한 푸리에 사인(sine) 및 코사인(cosine) 급수를 구하여라.

예제 3.6 다음 주어진 함수 $f(x)$ 의 반구간 전개(half-range expansion)를 구하여라.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2k}{L} & , \quad \left(0 < x < \frac{L}{2}\right) \\ \frac{2k}{L}(L-x), & \left(\frac{L}{2} < x < L\right) \end{cases}$$

예제 3.7 다음 주어진 비주기 함수 $f(x)$ 에 대하여 물음에 답하여라.

$$f(x) = \begin{cases} a, & (0 \leq x \leq a) \\ 0, & (a < x \leq 2a) \end{cases}$$

(1) $f(x)$ 를 짝함수(우함수)로 확장함으로써 반구간 전개를 하여 푸리에 급수(Fourier series)를 구하여라.

(2) $f(x)$ 를 홀함수(기함수)로 확장함으로써 반구간 전개를 하여 푸리에 급수(Fourier series)를 구하여라.

8.4 복소수형 푸리에 급수(Fourier Series with Complex Forms)

1. 복소수형 푸리에 급수(Fourier Series with Complex Forms)

오일러 공식(Euler's formular)

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

는 복소지수함수 e^{ix} 가 코사인(cosine)과 사인(sine)에 대한 정보를 동시에 가지고 있기 때문에 주기함수를 복소지수함수를 이용하여 푸리에 급수(Fourier series)로 전개하면 매우 편리하다.

주기가 p 인 주기함수 $f(x)$ 의 **복소수형 푸리에 급수(Fourier series)**는 다음과 같이 표현된다.

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i \frac{2n\pi}{p} x}$$

[참고] ① 여기서 c_n 은 아래와 같다.

$$c_n = \frac{1}{p} \int_{-\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}} f(x) e^{-i \frac{2n\pi}{p} x} dx$$

② 주기가 2π 인 함수 $f(x)$ 의 **복소수형 푸리에 급수**는 다음과 같다.

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

$$\text{단, } c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx$$

개념 및 내용 설명

예제 4.1 주기 $p = 2\pi$ 인 주기함수 $f(x)$ 의 복소수형 푸리에 급수가 다음과 표현됨을 같음을 보여라.

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

단, $c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx$ 이다.

예제 4.2 주기 2π 인 주기함수 $f(x) = \begin{cases} a, & (0 \leq x < \pi) \\ 0, & (-\pi \leq x < 0) \end{cases}$ 를 복소수형 푸리에 급수로 전개하여라.

예제 4.3 주기가 π 인 $f(x) = e^{-x}$, $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ 를 복소수형 푸리에 급수로 전개하여라.

예제 4.4 주기가 2인 $f(x) = x$, $0 < x < 2$ 를 복소수형 푸리에 급수로 전개하여라.

예제 4.5 주기가 4인 다음 주어진 함수 $f(x)$ 의 복소수형 푸리에 급수를 구하여라.

$$f(x) = \begin{cases} 1, & (0 < x < 2) \\ 0, & (2 < x < 4) \end{cases}$$

8.5 푸리에 적분(Fourier Integral)

1. 실수형 푸리에 적분(Fourier integral with real form)

푸리에 급수(Fourier series)는 주기함수를 포함한 여러 공학적인 응용에서 매우 유용한 도구를 제공한다. 그러나 실제 응용에 있어 많은 경우에 비주기함수를 포함하기 때문에 이를 수학적으로 처리하기 위해서는 푸리에 급수(Fourier series) 표현을(실수형 또는 복소수형) 일반화할 필요가 있다. 따라서 이를 위해서는 주기 p 를 가진 주기함수 $f(x)$ 를 실수형 푸리에 급수(Fourier series)로 나타낸 다음 $p \rightarrow \infty$ 로 접근시킴으로써 푸리에 급수(Fourier series)가 어떠한 형태로 변화되는가를 알아보면 된다.

이와 같은 과정이 가능한 이유는 비주기함수 $f(x)$ 는 주기가 ∞ 인 주기함수로 간주할 수 있기 때문이다. 이러한 과정을 통해 얻어진 푸리에 급수(Fourier series)의 일반화된 형태를 **푸리에 적분(Fourier Integral)**이라 부르고, 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left[\cos(wx) \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(wt) dt + \sin(wx) \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin(wt) dt \right] dw \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [A(w) \cos(wx) + B(w) \sin(wx)] dw \end{aligned}$$

[참고] ① 여기서 $A(w)$ 와 $B(w)$ 은 다음과 같다.

$$A(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(wt) dt, \quad B(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin(wt) dt$$

② 【푸리에 코사인 적분: Fourier cosine integral】

짝함수(우함수)인 비주기함수 $f(x)$ 의 푸리에 적분을 **푸리에 코사인 적분(Fourier cosine integral)**이라 하고 다음과 같다.

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} A(w) \cos(wx) dw$$

③ 【푸리에 사인 적분: Fourier sine integral】

홀함수(기함수)인 비주기함수 $f(x)$ 의 푸리에 적분을 **푸리에 사인 적분(Fourier cosine integral)**이라 하고 다음과 같다.

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} B(w) \sin(wx) dw$$

2. 복소수형 푸리에 적분(Fourier integral with complex form)

비주기함수 $f(x)$ 는 주기가 ∞ 인 주기함수로 간주할 수 있기 때문이며, 이러한 과정을 통해 얻어진 복소수형 푸리에 급수(Fourier series with complex form)의 일반화된 형태를 **복소수형 푸리에 적분**(Fourier Integral with complex form)이라 부르고, 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-iwt} dt \right] e^{iwx} dw \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(w) e^{iwx} dw \end{aligned}$$

[참고] ① 여기서 $F(w)$ 를 $f(x)$ 의 **푸리에 변환**(Fourier transformation)이라고 정의하고, 다음과 같다.

$$\hat{f}(w) = F(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-iwt} dt$$

② 복소수형 푸리에 적분에 나타나는 상수인 $\frac{1}{2\pi}$ 은 단순한 **스케일 인자**(scale factor)에 불과하므로 $F(w)$ 의 정의 식에 포함시킬 수도 있다. 이렇게 되면 $f(x)$ 의 복소수형 푸리에 적분은 다음과 같이 표현된다.

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(w) e^{iwx} dw, \quad F(w) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-iwt} dt$$

또한 상수 $\frac{1}{2\pi}$ 을 공평하게 두 개로 나누어서 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ 을 $f(x)$ 와 $F(w)$ 에 모두 포함시킬 수도 있으며, 이때 $f(x)$ 의 복소수형 푸리에 적분은 다음과 같이 표현된다.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(w) e^{iwx} dw, \quad F(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-iwt} dt$$

개념 및 내용 설명

예제 5.1 【단일 파동: Single Pulse】 함수 $f(x) = \begin{cases} 1, & (|x| < 1) \\ 0, & (|x| > 1) \end{cases}$ 에 대하여 다음 물음에 답하여라.

(1) $f(x)$ 의 푸리에 적분(Fourier integral)을 구하여라.

(2) (1)의 사실을 이용하여 적분 $\int_0^\infty \frac{\cos(wx)\sin w}{w} dw$ 의 값을 구하여라.

(3) (2)의 내용을 이용하여 적분 $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ 의 값을 구하여라.

예제 5.2 함수 $f(x) = \begin{cases} x, & (0 \leq x \leq a) \\ 0, & (x \in \mathbb{R} - [0, a]) \end{cases}$ 의 푸리에 적분(Fourier integral)을 구하여라.

예제 5.3 함수 $f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & (x > 0) \\ e^x, & (x < 0) \end{cases}$ 에 대하여 다음 물음에 답하여라.

(1) $f(x)$ 의 푸리에 적분(Fourier integral)을 구하여라.

(2) (1)을 이용하여 $\int_0^\infty \frac{\cos(wx)}{w^2 + 1} dw$ 를 구하여라.

(3) (2)의 내용을 이용하여 적분 $\int_0^\infty \frac{\cos x}{x^2 + 1} dx$ 의 값을 구하여라.

예제 5.4 함수 $f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & (x > 0) \\ -e^x, & (x < 0) \end{cases}$ 에 대하여 다음 물음에 답하여라.

(1) $f(x)$ 의 푸리에 적분(Fourier integral)을 구하여라.

(2) (1)을 이용하여 $\int_0^\infty \frac{w \sin(wx)}{w^2 + 1} dw$ 를 구하여라.

(3) (2)의 내용을 이용하여 적분 $\int_0^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2 + 1} dx$ 의 값을 구하여라.

예제 5.5 함수 $f(x) = e^{-kx}$ ($x > 0, k > 0$)의 푸리에 코사인 적분(Fourier cosine integral)과 푸리에 사인 적분(Fourier sine integral)을 구하여라.

예제 5.6 함수 $f(x) = \begin{cases} 1, & (0 < x < a) \\ 0, & (x < 0, \text{ or } x > a) \end{cases}$ 의 복소수형 푸리에 적분(Fourier integral with complex form)을 구하여라.

예제 5.7 수 $f(x) = \begin{cases} a - x, & (0 < x < a) \\ 0, & (x < 0, \text{ or } x > a) \end{cases}$ 의 복소수형 푸리에 적분(Fourier integral with complex form)을 구하여라.

예제 5.8 실수에서 정의된 함수 $f(x)$ 의 푸리에(Fourier)적분을

$$F(\xi) = \int_0^{\infty} [A(\omega)\cos(\omega\xi) + B(\omega)\sin(\omega\xi)] d\omega,$$

$$A(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos(\omega x) dx, \quad B(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin(\omega x) dx$$

와 같이 정의할 때, 함수 $f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \sin x, & (|x| \leq \pi) \\ 0, & (|x| > \pi) \end{cases}$ 의 푸리에(Fourier)적분은?(중앙대 공대 2014)

① $F(\xi) = \int_0^{\infty} \frac{\sin(\pi\omega)\sin(\xi\omega)}{1-\omega^2} d\omega$

② $F(\xi) = \int_0^{\infty} \frac{1-\cos(\pi\omega)}{\omega} \sin(\xi\omega) d\omega$

③ $F(\xi) = \int_0^{\infty} \frac{\sin\omega - \omega\cos\omega}{\omega^2} \sin(\xi\omega) d\omega$

④ $F(\xi) = \int_0^{\infty} \frac{\omega^3 \sin(\xi\omega)}{\omega^4 + 4} d\omega$

예제 5.9 실수에서 정의된 함수 $f(x)$ 를 다음과 같이 정의하자.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & (x < -\pi) \\ 1, & (-\pi \leq x < 0) \\ 2, & (0 \leq x \leq \pi) \\ 0, & (x > \pi) \end{cases}$$

이때, $f(x)$ 를 아래와 같이 푸리에(Fourier) 적분으로 나타낼 때 $A(\alpha)$ 와 $B(\alpha)$ 가 바르게 짝지어진 것은?(중앙대 공대 2016)

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [A(\alpha)\cos\alpha x + B(\alpha)\sin\alpha x] d\alpha, \quad A(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos\alpha x dx, \quad B(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin\alpha x dx$$

① $A(\alpha) = 0, B(\alpha) = \frac{1-\cos(\alpha\pi)}{\alpha}$

② $A(\alpha) = \frac{3\sin(\alpha\pi)}{\alpha}, B(\alpha) = \frac{1+\cos(\alpha\pi)}{\alpha}$

③ $A(\alpha) = \frac{3\sin(\alpha\pi)}{\alpha}, B(\alpha) = \frac{1-\cos(\alpha\pi)}{\alpha}$

④ $A(\alpha) = 0, B(\alpha) = \frac{1+\cos(\alpha\pi)}{\alpha}$

8.6 푸리에 변환(Fourier Transformation)

1. 푸리에 변환(Fourier Transformation)

실제 세계에서 주어지는 여러 공학적 문제들은 시간의 영향을 받기 때문에 수학적인 표현이나 계산 등에 있어 복잡한 양상을 보이는 것이 일반적이다. 따라서 시간영역에서 주어진 복잡한 공학적 문제들을 수학적인 표현이나 계산이 간단히 처리될 수 있는 새로운 영역으로 다루면 해석상 매우 편리함을 얻을 수 있다.

수학에서 행해지는 변환(transformation)이란 한 형태의 방정식을 다른 형태로 변환시키는 도구(적분 또는 급수 등)이다. 가장 널리 상용되는 적분변환은 **라플라스 변환**(Laplace transformation)과 **푸리에 변환**(Fourier transformation) 등이다. 이러한 변환은 미분방정식을 대수방정식으로 변화시켜 주는 것이다. 대체로 대수방정식의 계산이 원래의 미분방정식보다 쉬워진다. 이때 대수방정식의 해를 다시 역으로 변환시켜 미분방정식의 해를 얻는다.

함수 $f(x)$ 의 **푸리에 변환**(Fourier transformation)을 다음과 같이 정의한다.

$$\hat{f}(w) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-iwx} dx$$

[참고] ① $\hat{f}(w) = F(f)$: 함수 $f(x)$ 의 **푸리에 변환**(Fourier transformation)

② $f(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(w)e^{iwx} dw$: $\hat{f}(w)$ 의 **푸리에 역변환**(Inverse Fourier transformation)

③ ①과 ②에 의해서 다음 성질이 성립한다.

$$(i) \hat{\hat{f}} = F(f) \quad (ii) f = F^{-1}(\hat{f})$$

2. 푸리에 변환의 성질

$$(1) F(af + bg) = aF(f) + bF(g) \quad [\text{푸리에 변환의 선형성}]$$

$$(2) F(f^{(n)}(x)) = (iw)^n F(f(x)) \quad [\text{도함수의 푸리에 변환}]$$

$$(3) F(f * g) = \sqrt{2\pi} F(f)F(g) \quad [\text{합성곱의 푸리에 변환}]$$

[참고] 두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 에 대하여 **합성곱**(convolution) $(f * g)(x)$ 을 다음과 같이 정의한다.

$$(f * g)(x) = f(x) * g(x) := \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(x - \tau)d\tau$$

개념 및 내용 설명

예제 6.1 다음 주어진 함수들의 푸리에 변환(Fourier transformation) $\hat{f}(w)$ 를 구하여라.

$$(1) f(x) = \begin{cases} 1, & (|x| < 1) \\ 0, & (|x| > 1) \end{cases}$$

$$(2) f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & (x > 0) \\ 0, & (x < 0) \end{cases}$$

예제 6.2 다음 주어진 함수들의 푸리에 변환(Fourier transformation) $\hat{f}(w)$ 를 구하여라.

$$(1) f(x) = e^{-ax} u(x) \quad (\text{단, } u(x) : \text{단위계단함수})$$

$$(2) f(x) = (3e^{-3x} + 4e^{-5x}) u(x)$$

예제 6.3 $f(x) = e^{-ax^2}$ ($a > 0$)의 푸리에 변환(Fourier transformation) $\hat{f}(w)$ 를 구하여라.

예제 6.4 【쌍대성 : Duality】 함수 $f(x)$ 의 푸리에(Fourier) 변환과 푸리에(Fourier) 역변환

$$\hat{f}(w) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-iwx} dx, \quad f(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(w) e^{iwx} dw$$

의 관계를 이용하면 다음과 같은 관계식을 보일 수 있다.

$$f(-w) = F(\hat{f}(x)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(x) e^{-iwx} dx \quad \text{[쌍대성]}$$

(1) $f(x) = e^{-a|x|}$ 의 푸리에 변환 $\hat{f}(w)$ 를 구하여라.

(2) (1)과 쌍대성을 이용하여 $g(x) = \frac{1}{x^2 + a^2}$ 의 푸리에 변환 $\hat{g}(w)$ 를 구하여라.

예제 6.5 $f(x) = e^{-x^2}$ 의 푸리에 변환은 다음과 같다.

$$\hat{f}(w) = F(e^{-x^2}) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{w^2}{4}}$$

이것을 이용하여 함수 $g(x) = -2xe^{-x^2} + 3e^{-4x^2}$ 의 푸리에 변환 $\hat{g}(w)$ 를 구하여라.

예제 6.6 실수에서 정의된 함수 $f(x)$ 의 Fourier 변환을 아래와 같이 정의한다.

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x} dx$$

이 때, 함수 $f(x) = \begin{cases} xe^{-x} & , (-1 < x < 0) \\ 0 & , (x \leq -1 \text{ 또는 } x \geq 0) \end{cases}$ 의 Fourier 변환은?(중양대 공대 2014)

$$\textcircled{1} \hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{(1-i\omega)e^{-i\omega} - 1}{\omega^2}$$

$$\textcircled{2} \hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{2\sin \omega}{\omega} + \frac{2\cos \omega - 2}{\omega^2} \right)$$

$$\textcircled{3} \hat{f}(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin(\omega - 2)}{\omega - 2}$$

$$\textcircled{4} \hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}(-\omega + i)^2} (1 + i\omega e^{1+i\omega})$$

예제 6.7 함수 $f(x) = \begin{cases} x & , (-1 < x < 1) \\ 0 & , (x \leq -1 \text{ 또는 } x \geq 1) \end{cases}$ 의 Fourier 변환 $\hat{f}(\omega)$ 를 구하면?(중양대 공대 2015)

(단, $\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x} dx$)

$$\textcircled{1} \hat{f}(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{i}{\omega^2} (\omega \cos \omega - \sin \omega)$$

$$\textcircled{2} \hat{f}(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{i}{\omega^2} (\omega \sin \omega - \cos \omega)$$

$$\textcircled{3} \hat{f}(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{i}{\omega^2} (\omega \sin \omega + \cos \omega)$$

$$\textcircled{4} \hat{f}(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{i}{\omega^2} (\omega \cos \omega + \sin \omega)$$