서문

미분적분학1은 대학 1학년 과정에서 일변수(스칼라)함수의 미분과 적분 및 그 응용에 대한 내용을 주로 배운다. 이 과정은 대학 신입생이면 반드시 배워야하는 필수과정이다. 따라서 본 강좌는 중 · 고등학교에서 배운 기본적인 사항 및 **기초수학**과정에서 배운 내용 이외의 내용을 주로 다루며, 이를 바탕으로 다변수(스칼라)함수와 다변수 벡터함수의 미분과 적분을 다루는 **미분적분학**2를 배우는 토대를 마련하여 **미분적분학**2를 보다 쉽게 이해하고 익힐 수 있게 한다.

우리가 **미분적분학**1에서 배울 주요내용 및 특징은 아래와 같다.

〈1〉 초등함수

– 함수의 엄밀한 수학적 개념과 정의에 대해서 정확히 이해하고 배운다.

– 함수의 일반적인 분류 및 종류에 대해서 알고, 미분과 적분의 대상이 되는 초등함수(다항함수, 거듭제곱함수, 유리함수, 대수함수, 지수 · 로그함수, 삼각함수, 역삼각함수, 쌍곡선함수, 역쌍곡선함수)에 대해서 안다.

– 특히, 주기함수인 삼각함수의 역함수인 역삼각함수의 개념과 정의 및 성질에 대해서 정확히 이해하고 다양한 문제에 적용할 수 있도록 한다.

– 자연지수 함수에 의해서 정의되는 쌍곡선함수와 역쌍곡선함수의 정의와 다양한 성질에 대해서도 정확히 이해하고 익힌다.

〈2〉 함수의 극한과 연속

– 함수의 극한 및 연속에 대한 개념적 이해와 엄밀한 정의를 배우고 익힌다.

– 다양한 종류의 함수(즉, 초등함수)에 대한 극한과 연속에 대해서 배우고 익힌다.

〈3〉 함수의 미분

– 미분계수, 도함수의 정의 및 의미를 이해하고 배운다.

– 기본적인 미분법칙인 합・차의 미분, 곱의 미분, 몫의 미분, 연쇄법칙, 음함수미분법, 역함수의 미분 등을 익힌다. 또한, 곱의 미분의 일반화인 “라이프니츠 공식”에 대해서도 정확히 이해하고 배운다.

– 다양한 함수(다항함수, 지수・로그함수, 삼각함수, 역삼각함수, 쌍곡선함수 등)의 미분법을 배우고, 특히 로그미분법(Logarithmic Differentiation)에 대해서도 정확히 이해하고 배운다.

– 선형근사와 미분과의 관계 및 차이를 익힌다.

〈4〉 미분의 응용

– 미분을 이용하여 함수의 최댓값과 최솟값을 구한다.

– 롤의 정리(Rolle’s Theorem) 및 평균값의 정리(Mean–value Theorem)를 알고, 그 응용을 익힌다.

– 함수의 그래와 미분과의 연관성을 배운다.

– 함수의 극한값을 계산하는 데 매우 유용한 로피탈의 법칙(L’Hospital’s Rule)과 근사해를 구하는 데 중요한 뉴턴방법(Newton’s method)을 배운다.

〈5〉 함수의 적분

– 미분의 역연산을 이용해서 함수의 부정적분을 정의하고 기본성질을 배운다.

– 다양한 적분의 기법인 치환적분, 삼각치한, 부분적분, 유리함수의 적분 등을 익히고 습득한다.

– 정적분의 개념 및 정의 배우고, 기본적인 성질들을 습득한다. 특히, 부정적분의 정리 및 미분적분학의 기본정리를 적확하게 이해하고 배운다.

– 이상적분의 개념 및 정의를 배우고 활용한다.

〈6〉 적분의 응용

– 넓이 및 부피를 적분을 이용해서 구한다. 특히, 회전체의 부피를 원반방법(Disk method) 및 주면각방법(Cylindrical shell method)을 이용해서 구한다.

– 곡선의 길이, 회전체의 겉넓이, 무게중심 등을 적분을 이용해서 구하는 법을 익히고 습득한다.

– 파푸스 정리(Pappus' Theorem)를 이용하여 x축 및 y축 회전이 아닌 일반적인 직선을 회전축으로 하는 회전체의 부피와 표면적을 계산할 수 있도록 한다.

〈7〉 매개방정식과 극좌표

– 매개변수로 정의되는 곡선과 이 곡선에 미분과 적분을 적용하는 것을 배우고 활용한다.

– 극좌표의 개념 및 정의를 정확히 이해하고 직교좌표와의 상호관계를 명확히 알고, 이를 통해서 극방정식과 직교방정식의 상호관계도 이해한다.

– 또한, $y=f(x)$ 또는 $F(x, y)=0$ 형태로 주어진 함수의 미분과 적분을 이용한 다양한 내용이 극좌표 및 극방정식과 극곡선(polar curve)에 어떻게 적용되는지를 배우고 익힌다.

– 극방정식의 그래프인 극곡선 중 몇 가지 중요한 기본유형(원, 심장형, 4엽장미, 리마송, 연주형 등)을 정확히 알고 있도록 한다.

〈8〉 무한급수

– 무한급수를 정의하고 무한급수의 수렴과 발산을 판단한다.

– 다양한 급수 판정법(일반항 판정법, 적분 판정법, 비교 판정법, 극한비교 판정법, 교대급수 판정법, 비 판정법, 제곱근 판정법 등)을 익히고 배운다.

〈9〉 멱급수와 함수의 급수전개

– 멱급수 및 테일러 급수(Taylor's series), 매클로린 급수(Maclaurin's series)의 다양한 성질을 이해하고 활용할 수 있도록 한다.

– 테일러 다항식(Taylor's polynomials)을 이용한 근삿값을 계산한다.

부디 이 교재를 통해서 **미분적분학1**의 내용을 정확히 이해하고 목표하는 결과가 있기를 바랍니다.

CONTENTS

PART

+ − × ÷

01

초등함수
(Elementary functions)

1.1 함수의 개념 및 종류

1. 함수의 개념

(1) **정의** : 공집합이 아닌 두 집합 X, Y가 주어졌을 때 "X에서 Y로의 함수" $f : X \to Y$는 다음 두 조건을 만족 시킬 때 **함수**(function)라 한다.

(i) $\forall x \in X \;\Rightarrow\; f(x) \in Y$

(ii) $\forall x_1 = x_2 \in X \;\Rightarrow\; f(x_1) = f(x_2) \in Y$

(2) **표현** : $y = f(x)$, $f : X \to Y$ 또는 $X \xrightarrow{f} Y$로 나타낸다.

(3) **용어** : 함수 $f : X \to Y$가 있을 때,

① X : 함수 f의 **정의역**(Domain).

② Y : 함수 f의 **공(변)역**(Co-domain).

③ $\mathrm{Im}(f) = f(X) := \{f(x) \mid x \in X\}$: 함수 f의 **치역**(Range).

[참고] $f(X) \subset Y$

(4) 함수의 그래프(Graph of function f)

함수 $f : X \to Y$가 있을 때,

$$\boxed{G(f) := \{(x, y) \mid y = f(x),\ x \in X\} = \{(x, f(x)) \mid x \in X\}}$$

를 함수 f의 **그래프**(Graph)라 한다.

2. 함수의 상등

(1) **정의 및 표현** : $f = g \;\Leftrightarrow\; \forall x \in X,\ f(x) = g(x)$로 나타낸다.

3. 함수의 사칙연산

f, $g : X \to Y \subset \mathbb{R}$ & α, $\beta \in \mathbb{R}$에 대해서 다음과 같이 함수의 **사칙연산**을 정의한다.

① $(\alpha f \pm \beta g)(x) := \alpha f(x) \pm \beta g(x)$ [합 · 차]

② $(f \cdot g)(x) := f(x) \cdot g(x)$ [곱의 정의]

③ $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) := \dfrac{f(x)}{g(x)}$ (단, $g(x) \neq 0$) [몫의 정의]

예제 1.1 함수 $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+2}}{x}$ 의 정의역을 구하시오.

예제 1.2 다음 주어진 함수의 그래프를 그리고 정의역과 치역을 찾으시오.

(1) $f(x)=2x+1$

(2) $f(x)=\dfrac{3x-1}{x+1}$

(3) $f(x)=2x^2-4x+1$

(4) $f(x)=\sqrt{4-x^2}$

예제 1.3 $f(x)=x-2,\ g(x)=5x+4$일 때 $2f-3g,\ f\cdot g$와 $\dfrac{f}{g}$를 구하시오.

예제 1.4 $f(x)=\dfrac{x^2+x}{x+1}$ 이고, $g(x)=x$ 일 때, $f=g$ 인가?

4. 함수의 종류

함수의 종류로는 **단사함수**(또는 일대일 함수), **전사함수**, **전단사함수**(또는 일대일 대응), **역함수**, **합성함수** 등이 있다.

(1) 단사함수(Injective function)

$$f : X \to Y : \textbf{단사함수} \Leftrightarrow \forall x_1 \neq x_2 \in X \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \in Y$$

$$\Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2) \in Y \Rightarrow x_1 = x_2 \in X$$

(2) 전사함수(Surjective function)

$$f : X \to Y : \textbf{전사함수} \Leftrightarrow f(X) = Y$$

$$\Leftrightarrow \forall y \in Y, \quad \exists x \in X \text{ s.t } y = f(x)$$

(3) 전단사함수(Bijective function)

$$f : X \to Y : \textbf{전단사함수} \Leftrightarrow \text{함수 } f \text{가 전산이고 단사인 함수}$$

$$\Leftrightarrow \forall y \in Y, \quad \exists 1 x \in X \text{ s.t } y = f(x)$$

(4) 역함수(Inverse function)

함수 $f : X \to Y$가 $y = f(x)$로 정의된 **전단사함수**일 때, $g : Y \to X$가 $x = g(y)$로 잘 정의된다. 이 때, 함수 g를 f의 **역함수**(inverse function)라 하고, $g = f^{-1}$로 표기한다.

$$\boxed{y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)}$$

(5) 합성함수(Composite function)

두 함수 $f : X \to Y$와 $g : Y \to Z$가 주어졌을 때, g와 f의 **합성함수** $g \circ f : X \to Z$는 다음과 같이 정의한다.

$$\boxed{(g \circ f)(x) := g(f(x)) \ , \ \forall x \in X}$$

(6) 항등함수(Identity function)

함수 $I_X : X \to X$ 가 모든 $x \in X$에 대해 $I_X(x) = x$ 일 때, I_X를 **항등함수**라 한다.

(7) 역함수의 성질(Properties of inverse function)

역함수가 존재하는 두 함수 $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$에 대해 다음과 같은 성질이 성립한다.

① $f^{-1} \circ f = I_X$ ② $f \circ f^{-1} = I_Y$ ③ $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

예제 1.5 다음 주어진 함수가 일대일 함수인지를 결정하시오.

(1) $f(x) = 3x - 7$ (2) $g(x) = x^3$ (3) $h(x) = x^2 + 4x$

예제 1.6 다음 물음에 답하시오.

(1) $f(x) = x^2 + 1,\ g(x) = x^3$ 일 때 합성함수 $f \circ g$ 와 $g \circ f$ 를 구하시오.

(2) $f(x) = 2x + 1,\ (g \circ f)(x) = 3x^2$ 일 때 $g(x)$ 를 구하시오.

(3) $f(x) = f_1(x) := x + 5,\ f_{n+1}(x) := (f \circ f_n)(x)$ 일 때 $f_n(x)$ 와 $f_{2017}(5)$ 를 구하시오.

예제 1.7 다음 주어진 함수의 역함수를 구하시오.

(1) $f(x) = 2x + 3$ (2) $g(x) = x^2,\ (x \le 0)$ (3) $h(x) = \begin{cases} x^2, & (x \ge 0) \\ -x^2, & (x < 0) \end{cases}$