

서문

미분적분학1은 대학 1학년 과정에서 일변수(스칼라)함수의 미분과 적분 및 그 응용에 대한 내용을 주로 배운다. 이 과정은 대학 신입생이면 반드시 배워야하는 필수과정이다. 따라서 본 강좌는 중·고등학교에서 배운 기본적인 사항 및 기초수학과정에서 배운 내용 이외의 내용을 주로 다루며, 이를 바탕으로 다변수(스칼라)함수와 다변수 벡터함수의 미분과 적분을 다루는 미분적분학2를 배우는 토대를 마련하여 미분적분학2를 보다 쉽게 이해하고 익힐 수 있게 한다.

우리가 미분적분학1에서 배울 주요내용 및 특징은 아래와 같다.

〈1〉 초등함수

- 함수의 엄밀한 수학적 개념과 정의에 대해서 정확히 이해하고 배운다.
- 함수의 일반적인 분류 및 종류에 대해서 알고, 미분과 적분의 대상이 되는 초등함수(다항함수, 거듭제곱함수, 유리함수, 대수함수, 지수·로그함수, 삼각함수, 역삼각함수, 쌍곡선함수, 역쌍곡선함수)에 대해서 안다.
- 특히, 주기함수인 삼각함수의 역함수인 역삼각함수의 개념과 정의 및 성질에 대해서 정확히 이해하고 다양한 문제에 적용할 수 있도록 한다.
- 자연지수 함수에 의해서 정의되는 쌍곡선함수와 역쌍곡선함수의 정의와 다양한 성질에 대해서도 정확히 이해하고 익힌다.

〈2〉 함수의 극한과 연속

- 함수의 극한 및 연속에 대한 개념적 이해와 엄밀한 정의를 배우고 익힌다.
- 다양한 종류의 함수(즉, 초등함수)에 대한 극한과 연속에 대해서 배우고 익힌다.

〈3〉 함수의 미분

- 미분계수, 도함수의 정의 및 의미를 이해하고 배운다.
- 기본적인 미분법칙인 합·차의 미분, 곱의 미분, 몫의 미분, 연쇄법칙, 음함수미분법, 역함수의 미분 등을 익힌다. 또한, 곱의 미분의 일반화인 “라이프니츠 공식”에 대해서도 정확히 이해하고 배운다.
- 다양한 함수(다항함수, 지수·로그함수, 삼각함수, 역삼각함수, 쌍곡선함수 등)의 미분법을 배우고, 특히 로그미분법(Logarithmic Differentiation)에 대해서도 정확히 이해하고 배운다.
- 선형근사와 미분과의 관계 및 차이를 익힌다.

〈4〉 미분의 응용

- 미분을 이용하여 함수의 최댓값과 최솟값을 구한다.
- 롤의 정리(Rolle's Theorem) 및 평균값의 정리(Mean-value Theorem)를 알고, 그 응용을 익힌다.
- 함수의 그래프와 미분과의 연관성을 배운다.
- 함수의 극한값을 계산하는 데 매우 유용한 로피탈의 법칙(L'Hospital's Rule)과 근사해를 구하는 데 중요한 뉴턴방법(Newton's method)을 배운다.

〈5〉 함수의 적분

- 미분의 역연산을 이용해서 함수의 부정적분을 정의하고 기본성질을 배운다.
- 다양한 적분의 기법인 치환적분, 삼각치환, 부분적분, 유리함수의 적분 등을 익히고 습득한다.
- 정적분의 개념 및 정의 배우고, 기본적인 성질들을 습득한다. 특히, 부정적분의 정리 및 미분적분학의 기본정리를 정확하게 이해하고 배운다.
- 이상적분의 개념 및 정의를 배우고 활용한다.

〈6〉 적분의 응용

- 넓이 및 부피를 적분을 이용해서 구한다. 특히, 회전체의 부피를 원반방법(Disk method) 및 주면각방법(Cylindrical shell method)을 이용해서 구한다.
- 곡선의 길이, 회전체의 겉넓이, 무게중심 등을 적분을 이용해서 구하는 법을 익히고 습득한다.
- 파푸스 정리(Pappus' Theorem)를 이용하여 x 축 및 y 축 회전이 아닌 일반적인 직선을 회전축으로 하는 회전체의 부피와 표면적을 계산할 수 있도록 한다.

〈7〉 매개방정식과 극좌표

- 매개변수로 정의되는 곡선과 이 곡선에 미분과 적분을 적용하는 것을 배우고 활용한다.
- 극좌표의 개념 및 정의를 정확히 이해하고 직교좌표와의 상호관계를 명확히 알고, 이를 통해서 극방정식과 직교방정식의 상호관계도 이해한다.
- 또한, $y = f(x)$ 또는 $F(x, y) = 0$ 형태로 주어진 함수의 미분과 적분을 이용한 다양한 내용이 극좌표 및 극방정식과 극곡선(polar curve)에 어떻게 적용되는지를 배우고 익힌다.
- 극방정식의 그래프인 극곡선 중 몇 가지 중요한 기본유형(원, 심장형, 4엽장미, 리마송, 연주형 등)을 정확히 알고 있도록 한다.

〈8〉 무한급수

- 무한급수를 정의하고 무한급수의 수렴과 발산을 판단한다.
- 다양한 급수 판정법(일반항 판정법, 적분 판정법, 비교 판정법, 극한비교 판정법, 교대급수 판정법, 비 판정법, 제곱근 판정법 등)을 익히고 배운다.

〈9〉 멱급수와 함수의 급수전개

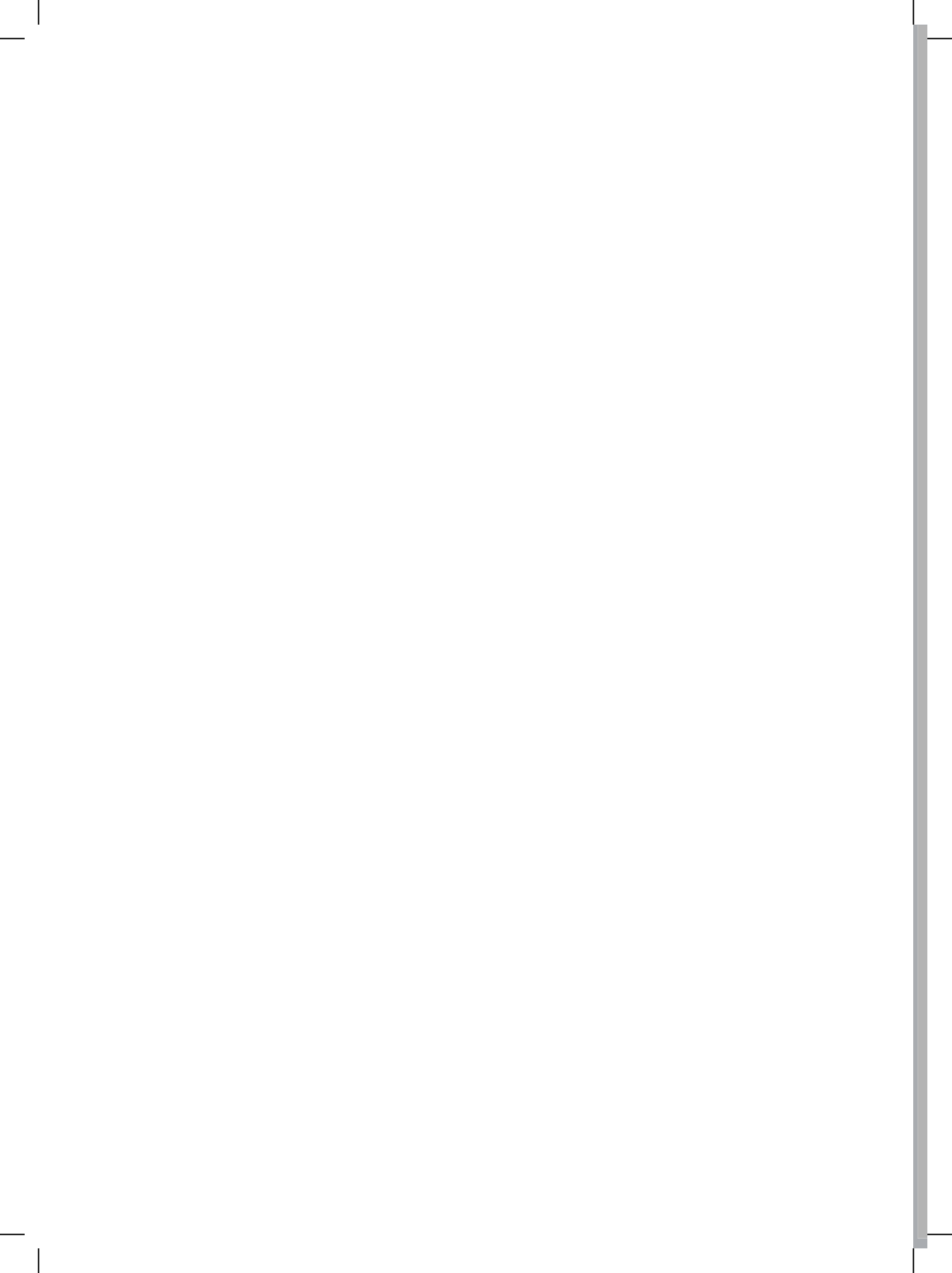
- 멱급수 및 테일러 급수(Taylor's series), 매클로린 급수(Maclaurin's series)의 다양한 성질을 이해하고 활용할 수 있도록 한다.
- 테일러 다항식(Taylor's polynomials)을 이용한 근삿값을 계산한다.

부디 이 교재를 통해서 미분적분학1의 내용을 정확히 이해하고 목표하는 결과가 있기를 바랍니다.

CONTENTS

01초등함수	7
1.1 함수의 개념 및 종류	8
1.2 다항함수, 거듭제곱함수, 유리함수 및 대수함수	16
1.3 지수함수	19
1.4 로그함수	22
1.5 삼각함수	28
1.6 역삼각함수	37
1.7 쌍곡선함수	43
1.8 역쌍곡선함수	46
02함수의 극한과 연속	49
2.1 함수의 극한	50
2.2 함수의 연속	56
03함수의 미분	65
3.1 미분계수와 도함수	66
3.2 도함수의 성질	70
3.3 연쇄법칙	74
3.4 음함수미분법과 역함수의 미분	77
3.5 다항함수, 거듭제곱함수, 유리함수 및 대수함수의 미분	81
3.6 삼각함수와 역삼각함수의 미분	83
3.7 지수 · 로그함수의 미분	88
3.8 로그미분법(Logarithmic Differentiation)	91
3.9 쌍곡선함수와 역쌍곡선함수의 미분	96
04미분의 응용	101
4.1 선형근사와 미분	102
4.2 뉴턴방법	109
4.3 평균값정리	112
4.4 곡선의 개형	117
4.5 최댓값과 최솟값	124
4.6 변화율	132
4.7 로피탈 정리	137
4.8 곡률	143

05함수의 적분	145
5.1 부정적분	146
5.2 정적분	149
5.3 정적분의 성질	154
5.4 치환적분	167
5.5 부분적분	178
5.6 삼각함수의 적분	182
5.7 유리함수의 적분	188
5.8 수치적분	191
5.9 이상적분	195
06적분의 응용	203
6.1 곡선 사이의 넓이	204
6.2 회전체의 부피-원반방법	209
6.3 회전체의 부피-주면각방법	216
6.4 호의 길이	222
6.5 회전면의 면적	228
6.6 무게중심과 파푸스정리	232
07매개방정식과 극좌표	239
7.1 매개곡선과 미분	240
7.2 매개곡선과 적분	248
7.3 극좌표와 극곡선	253
7.4 극좌표에서의 미분과 적분	261
08무한급수	269
8.1 수열(Sequence)	270
8.2 무한급수와 일반항 판정법	276
8.3 양항급수-적분판정법	285
8.4 양항급수-비교판정법과 극한비교판정법	291
8.5 교대급수-교대급수판정법	296
8.6 비판정법과 n 제곱근판정법	300
09멱급수와 함수의 급수전개	307
9.1 멱급수	308
9.2 멱급수의 연산	317
9.3 테일러급수와 매클로린급수	322
정답	333



PART

+

-

×

÷

01

초등함수 (Elementary functions)

- 1.1 함수의 개념 및 종류
- 1.2 다항함수, 거듭제곱함수, 유리함수 및 대수함수
- 1.3 지수함수(Exponential function)
- 1.4 로그함수(Logarithmic function)
- 1.5 삼각함수(Trigonometric function)
- 1.6 역삼각함수(Inverse trigonometric function)
- 1.7 쌍곡선함수(Hyperbolic function)
- 1.8 역쌍곡선함수(Inverse hyperbolic function)

1.1 ○ 함수의 개념 및 종류

1. 함수의 개념

(1) 정의 : 공집합이 아닌 두 집합 X, Y 가 주어졌을 때 “ X 에서 Y 로의 함수” $f : X \rightarrow Y$ 는 다음 두 조건을 만족시킬 때 **함수(function)**라 한다.

- (i) $\forall x \in X \Rightarrow f(x) \in Y$
- (ii) $\forall x_1 = x_2 \in X \Rightarrow f(x_1) = f(x_2) \in Y$

(2) 표현 : $y = f(x), f : X \rightarrow Y$ 또는 $X \xrightarrow{f} Y$ 로 나타낸다.

(3) 용어 : 함수 $f : X \rightarrow Y$ 가 있을 때,

- ① X : 함수 f 의 **정의역(Domain)**.
- ② Y : 함수 f 의 **공(변)역(Co-domain)**.
- ③ $\text{Im}(f) = f(X) := \{f(x) \mid x \in X\}$: 함수 f 의 **치역(Range)**.

[참고] $f(X) \subset Y$

(4) 함수의 그래프(Graph of function f)

함수 $f : X \rightarrow Y$ 가 있을 때,

$$G(f) := \{(x, y) \mid y = f(x), x \in X\} = \{(x, f(x)) \mid x \in X\}$$

를 함수 f 의 **그래프(Graph)**라 한다.

2. 함수의 상등

(1) 정의 및 표현 : $f = g \Leftrightarrow \forall x \in X, f(x) = g(x)$ 로 나타낸다.

3. 함수의 사칙연산

$f, g : X \rightarrow Y \subset \mathbb{R}$ & $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ 에 대해서 다음과 같이 함수의 **사칙연산**을 정의한다.

- ① $(\alpha f \pm \beta g)(x) := \alpha f(x) \pm \beta g(x)$ [합·차]
- ② $(f \cdot g)(x) := f(x) \cdot g(x)$ [곱의 정의]
- ③ $\left(\frac{f}{g}\right)(x) := \frac{f(x)}{g(x)}$ (단, $g(x) \neq 0$) [몫의 정의]

예제 1.1 함수 $f(x) = \frac{\sqrt{x+2}}{x}$ 의 정의역을 구하시오.

예제 1.2 다음 주어진 함수의 그래프를 그리고 정의역과 치역을 찾으시오.

(1) $f(x) = 2x + 1$

(2) $f(x) = \frac{3x - 1}{x + 1}$

(3) $f(x) = 2x^2 - 4x + 1$

(4) $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$

예제 1.3 $f(x) = x - 2$, $g(x) = 5x + 4$ 일 때 $2f - 3g$, $f \cdot g$ 와 $\frac{f}{g}$ 를 구하시오.

예제 1.4 $f(x) = \frac{x^2 + x}{x + 1}$ 이고, $g(x) = x$ 일 때, $f = g$ 인가?

4. 함수의 종류

함수의 종류로는 **단사함수**(또는 일대일 함수), **전사함수**, **전단사함수**(또는 일대일 대응), **역함수**, **합성함수** 등이 있다.

(1) 단사함수(Injective function)

$$f: X \rightarrow Y: \text{단사함수} \Leftrightarrow \forall x_1 \neq x_2 \in X \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \in Y$$

$$\Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2) \in Y \Rightarrow x_1 = x_2 \in X$$

(2) 전사함수(Surjective function)

$$f: X \rightarrow Y: \text{전사함수} \Leftrightarrow f(X) = Y$$

$$\Leftrightarrow \forall y \in Y, \exists x \in X \text{ s.t } y = f(x)$$

(3) 전단사함수(Bijective function)

$$f: X \rightarrow Y: \text{전단사함수} \Leftrightarrow \text{함수 } f \text{가 전산이고 단사인 함수}$$

$$\Leftrightarrow \forall y \in Y, \exists 1x \in X \text{ s.t } y = f(x)$$

(4) 역함수(Inverse function)

함수 $f: X \rightarrow Y$ 가 $y = f(x)$ 로 정의된 **전단사함수**일 때, $g: Y \rightarrow X$ 가 $x = g(y)$ 로 잘 정의된다. 이 때, 함수 g 를 f 의 **역함수**(inverse function)라 하고, $g = f^{-1}$ 로 표기한다.

$$y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$$

(5) 합성함수(Composite function)

두 함수 $f: X \rightarrow Y$ 와 $g: Y \rightarrow Z$ 가 주어졌을 때, g 와 f 의 **합성함수** $g \circ f: X \rightarrow Z$ 는 다음과 같이 정의한다.

$$(g \circ f)(x) := g(f(x)), \forall x \in X$$

(6) 항등함수(Identity function)

함수 $I_X: X \rightarrow X$ 가 모든 $x \in X$ 에 대해 $I_X(x) = x$ 일 때, I_X 를 **항등함수**라 한다.

(7) 역함수의 성질(Properties of inverse function)

역함수가 존재하는 두 함수 $f: X \rightarrow Y$, $g: Y \rightarrow Z$ 에 대해 다음과 같은 성질이 성립한다.

$$\textcircled{1} f^{-1} \circ f = I_X \quad \textcircled{2} f \circ f^{-1} = I_Y \quad \textcircled{3} (g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

예제 1.5 다음 주어진 함수가 일대일 함수인지를 결정하시오.

(1) $f(x) = 3x - 7$

(2) $g(x) = x^3$

(3) $h(x) = x^2 + 4x$

예제 1.6 다음 물음에 답하시오.

(1) $f(x) = x^2 + 1$, $g(x) = x^3$ 일 때 합성함수 $f \circ g$ 와 $g \circ f$ 를 구하시오.

(2) $f(x) = 2x + 1$, $(g \circ f)(x) = 3x^2$ 일 때 $g(x)$ 를 구하시오.

(3) $f(x) = f_1(x) := x + 5$, $f_{n+1}(x) := (f \circ f_n)(x)$ 일 때 $f_n(x)$ 와 $f_{2017}(5)$ 를 구하시오.

예제 1.7 다음 주어진 함수의 역함수를 구하시오.

(1) $f(x) = 2x + 3$

(2) $g(x) = x^2, (x \leq 0)$

(3) $h(x) = \begin{cases} x^2, & (x \geq 0) \\ -x^2, & (x < 0) \end{cases}$