

1 전달함수 및 주파수응답크기

$$(1) H(s) = \pm \frac{Kb}{s^2 + as + b} = \pm \frac{K\omega_o^2}{s^2 + 2\zeta\omega_o s + \omega_o^2} \quad (K: \text{통과대역이득, 직류이득})$$

$$(2) H(j\omega) = \pm \frac{K\omega_o^2}{\omega_o^2 - \omega^2 + j2\zeta\omega_o\omega} \quad \text{에서 (편의상) 분모분자를 } \omega_o^2 \text{ 로 나누어 주면}$$

$$H(j\omega) = \pm \frac{K}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_o^2} + j2\zeta\frac{\omega}{\omega_o}} = \pm \frac{K}{1 - u^2 + j2\zeta u} \quad \left(u = \frac{\omega}{\omega_o}\right) \text{ 이므로}$$

$$\text{주파수응답크기 } |H(j\omega)| = \left| \pm \frac{K}{1 - u^2 + j2\zeta u} \right| = \frac{K}{\sqrt{(1 - u^2)^2 + 4\zeta^2 u^2}}$$

2 2차 저역통과필터의 최대이득- $|H(j\omega)|$

$$|H(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{u^4 + 2(2\zeta^2 - 1)u^2 + 1}} = \frac{K}{\sqrt{t^2 - 2(1 - 2\zeta^2)t + 1}} \quad (t \geq 0) \text{ 에서 분모가 최소일 때}$$

$|H(j\omega)|$ 는 최대이므로 분모의 루트 속이 최소가 되는 주파수 ω_m 을 ζ 의 범위에 따라 구해본다. $f(t) = t^2 - 2(1 - 2\zeta^2)t + 1$ 이라 두면 $f(t)$ 는 중심축이 $t = 1 - 2\zeta^2$ 인 2차함수이므로 중심축 $t = 1 - 2\zeta^2$ 이 $t \geq 0$ 의 범위에 존재하는 경우와 그렇지 않은 경우로 나누어 생각하면 된다.

$$(1) \zeta \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ 일 때}$$

중심축 $t = 1 - 2\zeta^2 \leq 0$ 이므로 $f(t)$ 는 $t = 0$ 에서 최소가 된다. 따라서 $|H(j\omega)|$ 의 최댓값

$$|H(j\omega)|_{\max} = \frac{K}{\sqrt{0 - 0 + 1}} = K \text{ 이다. 또한, } t = u^2 = \frac{\omega_m^2}{\omega_o^2} = 0 \text{ 이므로 } |H(j\omega)| \text{ 는 } \omega_m = 0 \text{ 에서}$$

최대가 된다.

$$(2) 0 < \zeta < \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ 일 때}$$

우선, $f(t)$ 를 완전제곱꼴로 정리하면 $f(t) = t^2 - 2(1 - 2\zeta^2)t + 1 = (t - (1 - 2\zeta^2))^2 + 4\zeta^2(1 - \zeta^2)$ 이다. 이 때 중심축 $t = 1 - 2\zeta^2 > 0$ 이므로 $f(t)$ 는 $t = 1 - 2\zeta^2$ 에서 최소가 된다.

$$\text{따라서 } |H(j\omega)| \text{ 의 최댓값 } |H(j\omega)|_{\max} = \frac{K}{\sqrt{4\zeta^2(1 - \zeta^2)}} = \frac{K}{2\zeta\sqrt{1 - \zeta^2}} \text{ 이다.}$$

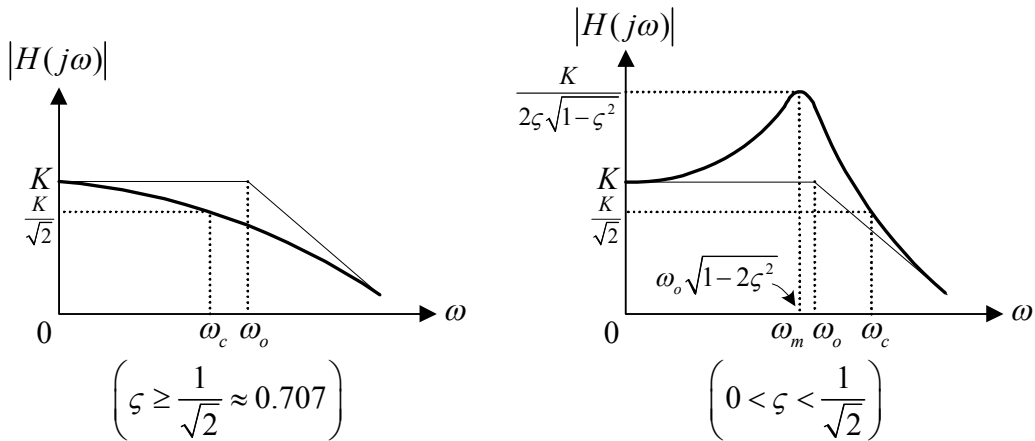
또한, $t = u^2 = \frac{\omega_m^2}{\omega_o^2} = 1 - 2\zeta^2$ 이므로 $|H(j\omega)|$ 는 $\omega_m = \omega_o \sqrt{1 - 2\zeta^2}$ ($\therefore \omega_m < \omega_o$) 에서 최대이다.

3 2차 저역통과필터의 차단주파수

1차 저역, 고역통과필터 및 2차 대역통과, 대역차단필터의 경우 차단주파수 ω_c 를 $|H(j\omega)|$ 의 최댓값의 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 배가 되는 주파수로 정의하였다. 그런데 2차 저역통과필터의 경우 $\omega = 0$ 외의 다른 주파수에서 최댓값을 가질 수 있으므로 차단주파수 ω_c 를 통과대역이득(또는 $\omega = 0$ 에서의 이득)의 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 배가 되는 주파수로 정의한다.

4 2차 저역통과필터의 주파수응답크기곡선

상기 내용들을 고려하여 $|H(j\omega)|$ 의 그래프개형을 그리면 아래와 같다. (편의상 ω 축은 log스케일로 잡았으며 20log를 붙이지 않고 이득을 나타내었다.)



5 2차 고역통과필터의 주파수응답크기곡선

전달함수 $H(s) = \pm \frac{Ks^2}{s^2 + as + b} = \pm \frac{Ks^2}{s^2 + 2\zeta\omega_o s + \omega_o^2}$ 형태인 2차 고역통과필터의 경우,

$H(j\omega) = \pm \frac{K\omega^2}{\omega_o^2 - \omega^2 + j2\zeta\omega_o\omega}$ 에서 분모분자를 ω^2 로 나누어 주면

$$H(j\omega) = \pm \frac{K}{1 - \frac{\omega_o^2}{\omega^2} + j2\zeta\frac{\omega_o}{\omega}} = \pm \frac{K}{1 - u^2 + j2\zeta u} \quad \left(u = \frac{\omega_o}{\omega} \right)$$

$$\therefore |H(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{(1-u^2)^2 + 4\zeta^2 u^2}}$$

즉, 2차 저역통과필터의 $|H(j\omega)|$ 와 동일하므로 2차 저역통과필터의 결과를 이용하면

(1) $\zeta \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$ 일 때	(2) $0 < \zeta < \frac{1}{\sqrt{2}}$ 일 때
$u^2 = 0$, 즉 $\omega_m = \infty$ 일 때 최댓값 $ H(j\omega) _{\max} = K$	$u^2 = 1 - 2\zeta^2$, 즉 $\omega_m = \frac{\omega_o}{\sqrt{1-2\zeta^2}}$ 일 때 최댓값 $ H(j\omega) _{\max} = \frac{K}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}$