극좌표상에서 이중적분(Double Integrals in Polar Coordinates)

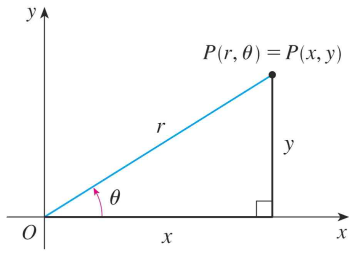
1. 극좌표상에서 이중적분의 개념 및 정의

평면의 어떤 곡선들, 즉, 원, 심장형, 장미 등은 직교좌표보다 극좌표를 사용하여 나타내는 편이 더 쉽다. 그러므로 이러한 곡선들로 둘러싸인 영역에서의 이중적분은 극좌표를 사용하면 좀 더 쉽게 계산할 수 있다.

(1) 직교좌표와 극좌표의 관계(←이해 후 반드시 암기할 것)

원점을 직교좌표계의 원점으로 하고, 극축을 직교좌표계의 x축의 양의 방향과 겹쳐 놓으면 평면상의 한 점 $P(r,\,\theta)=P(x,\,y)$의 극좌표 $(r,\,\theta)$와 직교좌표 $(x,\,y)$사이에 다음과 같은 관계식이 성립한다.

구분	직교좌표계	극좌표계
표현	$(x,\,y)$	$(r,\,\theta)$
관계식	$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$	$\begin{cases} r^2 = x^2+y^2 \\ \tan\theta = \dfrac{y}{x} \quad (x \neq 0) \end{cases}$



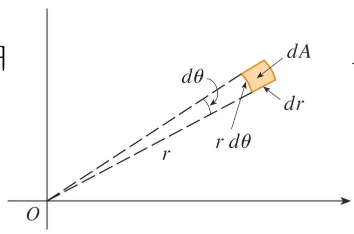
(2) 영역의 분류

영역의 구분	표 현
극장방형 (polar rectangle)	$R=\{(r,\,\theta)\mid a\le r\le b,\ \alpha\le\theta\le\beta\}$
r-**단순**(또는 형태Ⅰ) (r-simple)	$D=\{(r,\,\theta)\mid h_1(\theta)\le r\le h_2(\theta),\ \alpha\le\theta\le\beta\}$
θ-**단순**(또는 형태Ⅱ) (θ-simple)	$D=\{(r,\,\theta)\mid a\le r\le b,\ g_1(r)\le\theta\le g_2(r)\}$

(3) 직교좌표와 극좌표 사이의 면적 변화 관계

직교 좌표에서의 **면적 변화율**을 dA라 할 때, 이것이 극좌표로 변환했을 때 의 관계식은 다음과 같다.

$$dA = r\,dr\,d\theta = r\,d\theta\,dr$$



(4) 극장방형에서의 적분

$R=\{(r,\,\theta)\mid 0\le a\le r\le b,\ \alpha\le\theta\le\beta,\ 0\le\beta-\alpha\le 2\pi\}$ & $f\in C(R)$일 때, 이중적분은 다음과 같다.

$$\iint_R f(x,\,y)\,dA = \int_\alpha^\beta\int_a^b f(r\cos\theta,\,r\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta = \int_a^b\int_\alpha^\beta f(r\cos\theta,\,r\sin\theta)\,r\,d\theta\,dr$$

2. 극좌표상에서 영역의 분류에 따른 이중적분 계산

유계폐영역(bounded closed set)인 적분영역 $D \subset \mathbb{R}^2$가 극좌표상에서의 영역의 분류에 따른 이중적분의 계산은 다음과 같다.

영역 D의 분류	이중적분의 계산
r-**단순**(또는 형태 I)	$\displaystyle\iint_D f(x, y)\,dA = \int_\alpha^\beta \left[\int_{h_1(\theta)}^{h_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\,dr\right] d\theta$
θ-**단순**(또는 형태 II)	$\displaystyle\iint_D f(x, y)\,dA = \int_a^b \left[\int_{g_1(r)}^{g_2(r)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,d\theta\right] r\,dr$

[참고] ① D가 r-**단순**(또는 **형태**I)일 때, $D = \{(r, \theta)\mid h_1(\theta) \le r \le h_2(\theta),\ \alpha \le \theta \le \beta\}$로 표현된다.

② D가 θ-**단순**(또는 **형태**II)일 때, $D = \{(r, \theta)\mid a \le r \le b,\ g_1(r) \le \theta \le g_2(r)\}$로 표현된다.■