

강좌번호:

학번:

이름:

단답형 문제는 답만, 나머지 문제는 답과 그 풀이과정을 해당 답안영역에 가독성이 높게 정자로 쓰시오. (총점 150점)

문제 1. [단답형] (10점) 이급함수  $f(x,y)$ 의 원점  $(0,0)$ 에서의 이차 근사다항식이

$$T_2f(x,y) = 1 + x - 2y + 3x^2 - 2xy + y^2$$

일 때, 헤세 행렬  $f''(0,0)$ 을 구하시오.

문제 2. [단답형] (10점) 다변수 벡터함수

$$F(x,y) = (e^x \cos(3y + 3), e^x + y^2), \quad G(x,y) = (x^2 + y, x^3 - xy)$$

와 좌표평면의 영역

$$D(r) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2 + (y-2)^2 \leq r^2\}$$

에 대하여

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\text{Area}((F \circ G)(D(r)))}{\pi r^2}$$

를 구하시오.

| 단답형 답란 |   |
|--------|---|
| 1      | 2 |
|        |   |

|       |     |     |
|-------|-----|-----|
| 강좌번호: | 학번: | 이름: |
|-------|-----|-----|

문제 3. (10점) 좌표평면에서 정의된 벡터함수

$$\mathbf{F}(x,y) = \left( \int_1^{\pi} \frac{\cos(ux)}{u} du, \int_1^{\pi} \frac{\sin(vy)}{v} dv \right)$$

에 대하여 점  $(1,1)$ 에서  $\mathbf{F}$ 의 야코비 행렬을 구하시오.

(풀이)

|       |     |     |
|-------|-----|-----|
| 강좌번호: | 학번: | 이름: |
|-------|-----|-----|

문제 4. (15점) 금속 공의 온도( $^{\circ}C$ )는 공의 중심인 원점에서부터의 거리에 반비례한다. 공 안의 점  $(1, 2, 2)$ 에서 온도가  $120^{\circ}C$ 일 때 다음 물음에 답하시오.

- (a) (10점) 점  $(1, 2, 2)$ 에서  $(2, 1, 3)$  방향으로 온도의 변화율을 구하시오.
- (b) (5점) 공 안의 임의의 한 점  $X$ 에 대하여 온도가 가장 빠르게 증가하는 방향을  $X$ 로 표현하시오.

(풀이)

|       |     |     |
|-------|-----|-----|
| 강좌번호: | 학번: | 이름: |
|-------|-----|-----|

문제 5. (15점) 좌표공간에서 함수  $f(x, y, z) = x + y^2$ 와 곡면  $S = \{(x, y, z) \mid x + xy + xyz = 3\}$ 이 주어져 있다. 곡면  $S$  위의 한 점  $P = (1, 1, 1)$ 에서 이 곡면에 접하는 단위벡터  $\mathbf{v}$ 에 대해  $D_{\mathbf{v}}f(P)$ 의 최댓값을 구하시오.

(풀이)

|       |     |     |
|-------|-----|-----|
| 강좌번호: | 학번: | 이름: |
|-------|-----|-----|

문제 6. (15점) 좌표평면에서 정의된 함수  $z = f(x, y)$ 가 방정식  $e^{2z} = 4x + 2y - 2z + 1$  의 해가 될 때, 원점 근방에서  $f(x, y)$ 의 이차 근사다항식을 구하시오.

(풀이)

|       |     |     |
|-------|-----|-----|
| 강좌번호: | 학번: | 이름: |
|-------|-----|-----|

문제 7. (10점) 좌표평면에서 정의된 함수  $f(x, y) = \sin x \cosh y$ 의 임계점을 모두 구하고, 각 임계점을 극대점, 극소점, 안장점으로 분류하시오.

(풀이)

|       |     |     |
|-------|-----|-----|
| 강좌번호: | 학번: | 이름: |
|-------|-----|-----|

문제 8. (20점) 좌표평면의 영역  $D = \left\{ (x, y) \mid \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} \leq 1 \right\}$ 에서 정의된 함수  $f(x, y) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 4y^2 + 3$ 의 최댓값과 최솟값을 구하시오.

(풀이)

강좌번호:

학번:

이름:

문제 9. (10점) 곡선

$$X(t) = (\sin t, \sin(2t), t^2), \quad \pi \leq t \leq 2\pi$$

에 대하여, 벡터장  $\mathbf{F}(x, y, z) = (xy, z, y) + \frac{(x, y, z)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$ 의 선적분  $\int_X \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ 를 구하시오.

(풀이)

강좌번호:

학번:

이름:

문제 10. (20점) 영역  $\mathcal{U} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x > -1, y > -1, z > -1\}$ 에서 정의된 벡터장

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (yz + \ln(1+x), xz + \ln(1+y), xy + \ln(1+z))$$

에 대하여 다음 물음에 답하시오.

(a) (10점) 벡터장  $\mathbf{F}$ 가 닫힌 벡터장인지 판별하고, 잠재함수가 존재한다면 이를 구하시오.

(b) (10점) 곡선

$$X(t) = (\cos t, \sin t, t)$$

를 따라 점  $P = (1, 0, 0)$ 에서 점  $Q = \left(0, -1, \frac{\pi}{2}\right)$ 까지 벡터장  $\mathbf{F}$ 가 한 일을 구하시오.

(풀이)

강좌번호:

학번:

이름:

문제 11. (15점) 곡선

$$X(t) = (t(t - \pi), \cos t, \sin t), \quad 0 \leq t \leq \pi$$

에 대하여, 벡터장  $\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{\sin(r^3 + r + 1)}{r}(x, y, z)$ 의 선적분  $\int_X \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ 를 구하시오. 단,  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ 이다.

(풀이)

|       |     |     |
|-------|-----|-----|
| 강좌번호: | 학번: | 이름: |
|-------|-----|-----|

단답형 문제는 답만, 나머지 문제는 답과 그 풀이과정을 해당 답안영역에 가독성이 높게 정자로 쓰시오. (총점 200점)

문제 1. [단답형] (15점)  $\int_0^{\frac{\pi^2}{4}} \int_{\sqrt{x}}^{\frac{\pi}{2}} (x + \cos y) \, dydx$ 의 값을 구하시오.

| 단답형 답란 |
|--------|
| 1      |
|        |

|       |     |     |
|-------|-----|-----|
| 강좌번호: | 학번: | 이름: |
|-------|-----|-----|

문제 2. (15점) 평면에서 극좌표계로 주어진 영역

$$D : 0 \leq r \leq 1 - \cos \theta, \quad 0 \leq \theta \leq \pi$$

에서 함수  $f(x, y) = y$ 의 평균을 구하시오.

(풀이)

|       |     |     |
|-------|-----|-----|
| 강좌번호: | 학번: | 이름: |
|-------|-----|-----|

문제 3. (15점) 평면에서 세 직선  $x = 0, y = 0, x + y = 1$  로 둘러싸인 유계인 영역  $D$ 에서 정의된 함수

$$f(x,y) = \begin{cases} \cos\left(\frac{x-y}{x+y}\right), & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

에 대하여 적분  $\iint_D f(x,y) \, dx dy$ 의 값을 구하시오.

(풀이)

강좌번호:

학번:

이름:

문제 4. (15점) 평면곡선  $X(t) = (\sqrt{1 + \cos 2t} \cos t + 2, \sqrt{1 + \cos 2t} \sin t)$ ,  $0 \leq t \leq \pi$ 에 대하여 다음 선적분을 구하시오.

$$\int_X \left( \frac{\ln(1 + x^2 y^2)}{2x^2} - 3y \right) dx + \arctan(xy) \, dy.$$

(풀이)

|       |     |     |
|-------|-----|-----|
| 강좌번호: | 학번: | 이름: |
|-------|-----|-----|

문제 5. (15점) 타원판  $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} \leq 1$ 의 경계곡선에서 벡터장  $\mathbf{F}(x,y) = \left( \frac{xy^2}{(x^2+y^2)^2}, \frac{y^3}{(x^2+y^2)^2} \right)$ 의 플럭스를 계산하시오.

(풀이)

|       |     |     |
|-------|-----|-----|
| 강좌번호: | 학번: | 이름: |
|-------|-----|-----|

문제 6. (15점)  $x = t - \sin t, y = 1 - \cos t, 0 \leq t \leq 2\pi$ 로 주어진 사이클로이드를  $x$ 축 둘레로 회전하여 얻은 곡면과  $z \geq 0$ 의 공통부분을  $S$ 라 할 때,  $S$ 의 중심을 구하시오.

(풀이)

|       |     |     |
|-------|-----|-----|
| 강좌번호: | 학번: | 이름: |
|-------|-----|-----|

문제 7. (20점) 곡면  $S : x^2 + y^2 = \cos^2 z, 0 \leq z \leq \frac{\pi}{2}$ 에 대하여  $S$ 에서 함수  $f(x, y, z) = \sqrt{|x^2 + y^2 - 2|} + \sin z$ 의 면적분을 구하시오.

(풀이)

|       |     |     |
|-------|-----|-----|
| 강좌번호: | 학번: | 이름: |
|-------|-----|-----|

문제 8. (20점) 다음과 같이 주어진 곡면  $S$ 의 면적을 구하시오.

$$S : x^2 + y^2 + z^2 = 16, \quad 6\sqrt{2} \leq |2x - y - 2z| \leq 6\sqrt{3}$$

(풀이)

|       |     |     |
|-------|-----|-----|
| 강좌번호: | 학번: | 이름: |
|-------|-----|-----|

문제 9. (15점) 다음과 같이 주어진 영역  $\Omega$ 에 대하여,

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid |y| + |z| \leq 1, |z| + |x| \leq 1, |x| + |y| \leq 1\}$$

벡터장  $\mathbf{F}(x, y, z) = z\mathbf{k}$ 가 영역  $\Omega$ 의 경계  $\partial\Omega$ 를 빠져나가는 플럭스를 구하시오.

(풀이)

강좌번호:

학번:

이름:

**문제 10.** (15점) 매개 곡면  $S(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta, \sqrt{-r^2 + 4r - 3})$ ,  $1 \leq r \leq 3$ ,  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ 에 대해 다음 적분을 구하시오. (단, 곡면  $S$ 의 향은  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{k} \geq 0$ 가 되도록 한다.)

$$\iint_S \text{curl}(z^3 - y^3, x^3 + e^z, x^2 + y^2 + z^2) \cdot d\mathbf{S}$$

(풀이)

|       |     |     |
|-------|-----|-----|
| 강좌번호: | 학번: | 이름: |
|-------|-----|-----|

문제 11. (20점) 곡면  $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 1 + \sqrt{1 - x^2 - y^2}\}$ 에 대하여, 벡터장  $\mathbf{F}(x, y, z) = (2x, 2y, 2z)$ 의  
면적분  $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ 을 구하시오. (단, 곡면  $S$ 의 향은  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{k} \geq 0$ 가 되도록 한다.)

(풀이)

|       |     |     |
|-------|-----|-----|
| 강좌번호: | 학번: | 이름: |
|-------|-----|-----|

문제 12. (20점) 곡면  $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 1 + \sqrt{1 - x^2 - y^2}\}$ 와 점  $P(0, 0, 0.5)$ 에 대해 벡터장  $\mathbf{A}_P(X) = \frac{X - P}{|X - P|^3}$ 가  $S$ 를 빠져나가는 플럭스를 구하시오. (단, 곡면  $S$ 의 향은  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{k} \geq 0$ 가 되도록 한다.)

(풀이)